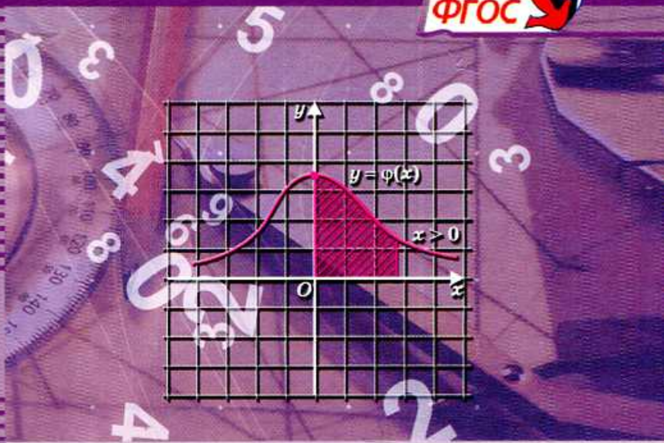
МАТЕМАТИКА:
Алгебра и начала математического анализа
Геометрия

ФГОС

А. Г. Мордкович
П. В. Семенов



АЛГЕБРА

И НАЧАЛА МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

БАЗОВЫЙ И УГЛУБЛЁННЫЙ УРОВНИ

11

Часть 1

УЧЕБНИК

ИЗДАТЕЛЬСТВО МНЕМОЗИНА

МАТЕМАТИКА 8 Алгебра И НАЧАЛА МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА □ Геометрия

А. Г. Мордкович, П. В. Семенов

АЛГЕБРА

И НАЧАЛА МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

11 класс

В двух частях

Часть 1

Учебник

для учащихся общеобразовательных организаций

(базовый и углублённый уровни)

Рекомендовано Министерством образования и науки Российской Федерации

2-е издание, стереотипное

Издательство МНЕМОЗИНА

Москва 2014

УДК 373.167.1:[512+517]
ББК 22.14я721+22.161я721.6
М79

Мордкович А. Г.
М79 Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Алгебра и начала математического анализа. 11 класс. В 2 ч. Ч. 1. Учебник для учащихся общеобразовательных организаций (базовый и углублённый уровни) / А. Г. Мордкович, П. В. Семенов. — 2-е изд., стер. — М. : Мнемозина, 2014. — 311 с. : ил.

ISBN 978-5-346-03199-4

Учебник представляет собой первую часть комплекта из двух книг, предназначенных для изучения курса алгебры и начал математического анализа в 11-м классе как на базовом, так и на углублённом уровне (вторая часть — задачник). Отличительные особенности учебника — доступное изложение материала, большое число подробно решённых примеров, приоритет функционально-графической линии, появление ряда новых тем.

УДК 373.167.1:[512+517]
ББК 22.14я721+22.161я721.6

ISBN 978-5-346-03198-7 (общ.)
ISBN 978-5-346-03199-4 (ч. 1)

Учебно-методический комплект* для изучения курса алгебры и начал математического анализа в 11-м классе на базовом и углублённом уровнях, выпускаемый издательством «Мнемозина», соответствует требованиям ФГОС среднего общего образования (2012 г.). Комплект состоит из следующих книг:

Программы. Математика. 5—6 классы. Алгебра. 7—9 классы. Алгебра и начала математического анализа. 10—11 классы / авт.-сост. И. И. Зубарева, А. Г. Мордкович;

А. Г. Мордкович, П. В. Семенов. Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. 11 класс. Алгебра и начала математического анализа. В 2 ч. Ч. 1. Учебник (базовый и углублённый уровни);

А. Г. Мордкович и *др.* Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. 11 класс. Алгебра и начала математического анализа. В 2 ч. Ч. 2. Задачник (базовый и углублённый уровни);

А. Г. Мордкович, П. В. Семенов. Алгебра и начала математического анализа. 11 класс. Методическое пособие для учителя (углублённый уровень);

В. И. Глизбург. Алгебра и начала математического анализа. 11 класс. Контрольные работы (базовый уровень, углублённый уровень) / под ред. А. Г. Мордковича;

Л. А. Александрова. Алгебра и начала математического анализа. 11 класс (базовый уровень, углублённый уровень). Самостоятельные работы / под ред. А. Г. Мордковича.

Этот комплект — непосредственное продолжение аналогичного комплекта для 10-го класса. У вас в руках вторая книга — учебник.

Изложение материала даётся подробно и обстоятельно. Во многих случаях материал, который содержится в том или ином параграфе, сложно успеть полностью изучить на уроке, но это и не нужно, поскольку данная книга предназначена в первую очередь для неспешного домашнего чтения и изучения школьниками. Опираясь на учебник, учитель сам прекрасно разберётся в том, что надо рассказать учащимся на уроке, что порекомендовать им запомнить, а что просто прочитать дома (и, возможно, обсудить на следующем уроке в классе — в жанре беседы).

---

* Более подробную информацию об УМК можно получить на сайтах www.mnemozina.ru и www.ziimag.narod.ru

В тексте приведено немало примеров с подробными решениями. На окончание решения примера указывает либо слово «ответ», либо значок ■. Часть текста дана петитом; изучать этот материал или нет — дело учителя.

Главы 2, 3, 4, 6 данной книги во многом текстуально совпадают с главами 6—8, 10 учебника для общеобразовательной школы* (речь идёт о главах, посвящённых интегралу, корням n-й степени, степеням и степенной функции, показательной и логарифмической функциям, уравнениям и неравенствам). Но есть и отличия: достаточно простые примеры и рассуждения заменены более сложными и интересными. Иначе говоря, уровень предъявления материала в указанных «старых» главах в целом выше, чем в упомянутом учебнике для общеобразовательной школы.

И, разумеется, появились новые главы и параграфы, например: § 10 «Извлечение корней из комплексных чисел», § 29 «Уравнения и неравенства с модулями», § 30 «Иррациональные уравнения и неравенства», § 31 «Доказательство неравенств», § 32 «Уравнения и неравенства с двумя переменными».

Новая глава (глава 1) посвящена многочленам от одной и нескольких переменных; здесь же рассматривается теорема Безу, приводится схема Горнера, обсуждаются различные приёмы решения уравнений высших степеней, уделяется внимание однородным и симметрическим системам уравнений.

Глава 5 «Элементы теории вероятностей и математической статистики» является непосредственным продолжением аналогичной главы из учебника для 10-го класса.

Учитывая требования ФГОС о необходимости формирования у учащихся универсальных учебных действий, в конце каждого параграфа (кроме § 7, 34) приведены вопросы для самопроверки. Кроме того, в конце каждой главы представлены сведения из истории математики.

В заключение обратим внимание учителя на то, что в методическом пособии приведены три варианта примерного тематического планирования (из расчёта 4, 5 или 6 часов в неделю на изучение курса алгебры и начал математического анализа в 11-м классе).

---

* *Мордкович А. Г. Семенов П. В.* Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. 10—11 классы. Алгебра и начала математического анализа. В 2 ч. Ч. 1. Учебник (базовый уровень). — М. : Мнемозина, 2013.

ГЛАВА 1 Многочлены

§ 1. Многочлены от одной переменной

Понятия одночлена, многочлена, стандартного вида одночлена и многочлена известны вам из курса алгебры 7-го класса. Мы говорили о том, как многочлены складывают, вычитают, перемножают, возводят в степень, разлагают на множители. Если, например, даны два многочлена $p_1(a;\ b) = 5a^2b + ab^2$ и $p_2(a;\ b) = a^2b - ab^2$, то нетрудно составить многочлен $p(a;\ b) = p_1(a;\ b) - p_2(a;\ b)$, получим $p(a;\ b) = (5a^2b + ab^2) - (a^2b - ab^2) = 5a^2b + ab^2 - a^2b + ab^2 = 4a^2b + 2ab^2 = 2ab(2a + b)$. В этом примере фигурировали многочлены от двух переменных a и b.

Особый интерес для математики и её приложений представляют многочлены от одной переменной. О них и пойдёт речь в настоящем параграфе.

1. Арифметические операции над многочленами от одной переменной

Пусть $p(x)$ — многочлен, представляющий собой сумму одночленов $a_0,\ a_1x,\ a_2x^2,\ a_3x^3,\ \ldots,\ a_nx^n$, где n — натуральное число, а $a_0,\ a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots,\ a_n$ — произвольные числа, коэффициенты, причём $a_n \neq 0$. Условимся располагать эти одночлены по убывающим степеням переменной x, т. е. записывать многочлен в виде $p(x) = a_nx^n + \ldots + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$, и называть эту запись **стандартным видом многочлена** $p(x)$. Одночлен a_nx^n называют **старшим членом** многочлена $p(x)$, коэффициент a_n — *коэффициентом при старшем члене.* Если $a_n = 1$, то многочлен называют **приведённым**, если же $a_n \neq 1$, то — **неприведённым**. Одночлен a_0 называют **свободным членом** многочлена $p(x)$. Число n — показатель степени старшего члена — называют **степенью многочлена**. Например, $x + 3$ — приведённый многочлен первой степени, $-0{,}5x^5 + 3x^2 - 4$ — неприведённый многочлен пятой степени, $ax^2 + bx + c$ (где $a \neq 0$) — многочлен второй степени, или *квадратный трёхчлен*. Впрочем, квадратный трёхчлен может не быть трёхчленом в буквальном смысле слова. Например, $2x^2 + x$ — квадратный трёхчлен; здесь $a = 2$, $b = 1$, $c = 0$.

Все не равные нулю числа удобно считать *многочленами нулевой степени*; например, число 3 можно (если нужно) представить в виде $3x^0$, поскольку $x^0 = 1$ (если $x \neq 0$).

Каждый многочлен $a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_2x^2 + a_1x + a_0$ можно рассматривать, с одной стороны, как *алгебраическое выражение*, записанное в виде суммы одночленов, и, с другой стороны, как *функцию*, которая каждому действительному числу x ставит в соответствие число $a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_2x^2 + a_1x + a_0$.

Следующая теорема показывает, что эти две точки зрения согласованы между собой, т. е. два многочлена одинаковой степени совпадают как *алгебраические выражения* в том и только в том случае, когда они совпадают как *функции*. Мы приводим эту теорему без доказательства.

Теорема 1. ***Два многочлена $p(x)$ и $s(x)$ тождественны тогда и только тогда, когда они имеют одинаковую степень и коэффициенты при одноимённых степенях переменной в обоих многочленах равны.***

Если, например, дано тождество $ax^3 + bx^2 + cx + d \equiv 3x^2 - 4x + 1$, то на основании теоремы 1 можно сразу сделать вывод о значениях коэффициентов a, b, c, d (их в подобных случаях называют *неопределёнными коэффициентами*): $a = 0$ (поскольку в правой части тождества нет члена с x^3), $b = 3$, $c = -4$, $d = 1$.

Многочлены от одной переменной, как и любые многочлены, можно складывать, вычитать, перемножать, возводить в натуральную степень; при этом снова получается многочлен от одной переменной. Если складываются или вычитаются два многочлена разной степени, то в результате получится многочлен, степень которого равна большей из имеющихся степеней. Если складываются или вычитаются многочлены одной и той же степени, то в результате получится многочлен той же или меньшей степени. Например, сложив многочлены первой степени $x + 3$ и пятой степени $-0{,}5x^5 + 3x^2 - 4$,получим $-0{,}5x^5 + 3x^2 + x - 1$ — многочлен пятой степени. Сложив два многочлена третьей степени $2x^3 + 3x^2 - x$ и $-2x^3 + 3x - 4$, получим $3x^2 + 2x - 4$ — многочлен второй степени; если же составить разность этих многочленов, то получится многочлен третьей степени: $(2x^3 + 3x^2 - x) - (-2x^3 + 3x - 4) = 4x^3 + 3x^2 - 4x + 4$.

Если многочлен $p(x)$ умножается на многочлен $s(x)$, то старший член произведения равен произведению старших членов многочленов $p(x)$ и $s(x)$. Поэтому если многочлен $p(x)$ имеет степень m, а многочлен $s(x)$ — степень n, то их произведение $p(x)s(x)$ имеет степень $m + n$. Например, перемножив многочлен пятой степени $-0{,}5x^5 + 3x^2 - 4$ и многочлен первой степени $x + 3$, получим многочлен шестой степени: $(-0{,}5x^5 + 3x^2 - 4)(x + 3) = -0{,}5x^6 - 1{,}5x^5 + 3x^3 + 9x^2 - 4x - 12$. Обратите внимание, что старший член полученного многочлена шестой степени равен произведению старших членов перемножаемых многочленов: $-0{,}5x^6 = -0{,}5x^5 \cdot x$.

Если многочлен $p(x)$ степени n возвести в степень m, то получится многочлен степени nm. Например, возведя многочлен пятой степени $p(x) = -0{,}5x^5 + 3x^2 - 4$ в квадрат, получим:

$$(p(x))^2 = (-0{,}5x^5 + 3x^2 - 4)^2 = (-0{,}5x^5 + 3x^2 - 4)(-0{,}5x^5 + 3x^2 - 4) =$$
$$= 0{,}25x^{10} - 1{,}5x^7 + 2x^5 - 1{,}5x^7 + 9x^4 - 12x^2 + 2x^5 - 12x^2 + 16 =$$
$$= 0{,}25x^{10} - 3x^7 + 4x^5 + 9x^4 - 24x^2 + 16;$$

это многочлен 10-й степени ($5 \cdot 2 = 10$).

В некоторых случаях выполнимо и деление многочлена на многочлен. Говорят, что **многочлен $p(x)$ делится на многочлен $s(x)$**, если существует такой многочлен $q(x)$, что выполняется тождество

$$p(x) \equiv s(x) \cdot q(x). \qquad (1)$$

При этом используется та же терминология, что и при делении чисел: $p(x)$ — *делимое* (или *кратное*), $s(x)$ — *делитель*, $q(x)$ — *частное*. Впрочем, можно сказать по-другому: $s(x)$ — частное, а $q(x)$ — делитель.

Например, многочлен $x^3 - 3x^2 + 5x - 15$ делится на многочлен $x^2 + 5$ и на многочлен $x - 3$, поскольку

$$x^3 - 3x^2 + 5x - 15 = (x^2 + 5)(x - 3).$$

Многочлены $x^2 + 5$ и $x - 3$ — делители многочлена $x^3 - 3x^2 + 5x - 15$.

Деление многочлена на многочлен нулевой степени (т. е. на отличное от нуля число) всегда осуществимо. Например, многочлен $x^2 + 5$ можно представить в виде $7\left(\frac{1}{7}x^2 + \frac{5}{7}\right)$. Значит, многочлен $x^2 + 5$ делится на многочлен нулевой степени 7, при этом в частном получится многочлен $\frac{1}{7}x^2 + \frac{5}{7}$. Это явно неинтересная операция, поэтому обычно, говоря о делении многочлена на многочлен, случай деления на многочлен нулевой степени не рассматривают.

2. Деление многочлена на многочлен с остатком

Как и для целых чисел, для многочленов рассматривают *деление с остатком*, возможность которого вытекает из следующей теоремы, которую мы приводим без доказательства.

Теорема 2. ***Для любых двух многочленов ненулевой степени $p(x)$ и $s(x)$ существует пара многочленов $q(x)$ и $r(x)$ такая, что степень многочлена $r(x)$ меньше степени многочлена $s(x)$ и выполняется тождество***

$$p(x) \equiv s(x)q(x) + r(x). \qquad (2)$$

В формуле (2) многочлен $p(x)$ называют *делимым*, $s(x)$ — *делителем*, $q(x)$ — *частным* (или *неполным частным*), а $r(x)$ — *остатком*. Формулу (1) можно считать частным случаем формулы (2) — когда остаток равен нулю.

Степень не равного нулю остатка в формуле (2) должна быть меньше степени делителя. Если, в частности, в качестве делителя выступает многочлен первой степени, то в остатке будет многочлен нулевой степени, т. е. число; если в качестве делителя выступает многочлен второй степени, то в остатке может быть число или многочлен первой степени. Степень частного $q(x)$ равна разности степеней делимого $p(x)$ и делителя $s(x)$ (естественно, при условии, что степень делителя не больше степени делимого).

Пример 1. Выполнить деление с остатком многочлена $2x^2 - x - 3$ на $x - 2$.

Решение. Имеем:

$$2x^2 - x - 3 = 2x^2 - 4x + 3x - 6 + 3 = 2x(x - 2) + 3(x - 2) + 3 =$$
$$= (x - 2)(2x + 3) + 3.$$

Итак,

$$2x^2 - x - 3 = (x - 2)(2x + 3) + 3.$$

Здесь $2x^2 - x - 3$ — делимое, $x - 2$ — делитель, $2x + 3$ — частное (неполное частное), 3 — остаток. ■

Для деления многочлена $p(x)$ на многочлен $s(x)$ можно применять правило деления углом, похожее на правило деления многозначных чисел. Чтобы получить старший член частного, делят старший член делимого $p(x)$ на старший член делителя $s(x)$. Полученный член частного умножают на делитель и произведение вычитают из делимого. Разделив старший член полученной первой разности на старший член делителя, находят второй член частного. Полученный второй член частного умножают на делитель и произведение вычитают из первой разности. С полученной второй разностью поступают так же: делят её старший член на старший член делителя, находят тем самым третий член частного, затем умножают его на делитель, произведение вычитают из второй разности и т. д. Этот процесс либо приведёт к делению многочлена $p(x)$ на многочлен $s(x)$ без остатка, либо на некотором шаге получится разность, степень которой меньше степени делителя, — эта разность и будет остатком $r(x)$.

Выполним, например, деление многочлена $2x^2 - x - 3$ на двучлен $x - 2$:

$$\begin{array}{r|l} 2x^2 - x - 3 & x-2 \\ \hline -\ 2x^2 - 4x & 2x+3 \\ \hline 3x - 3 & \text{(первая разность)} \\ -\ 3x - 6 & \\ \hline 3 & \text{(вторая разность, остаток)} \end{array}$$

Итак, $2x^2 - x - 3 = (x - 2)(2x + 3) + 3$ (см. пример 1).

Пример 2. Разделить многочлен $x^3 - 3x^2 + 5x - 15$ на многочлен $x^2 + 5$.

Решение.

$$\begin{array}{r|l} x^3 - 3x^2 + 5x - 15 & x^2+5 \\ \hline -\ x^3 \qquad\quad + 5x \qquad\ & x-3 \\ \hline -3x^2 \qquad\ - 15 & \\ -\ -3x^2 \qquad\ - 15 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

Остаток равен 0, значит, мы выполнили деление без остатка. Получили: $x^3 - 3x^2 + 5x - 15 = (x^2 + 5)(x - 3)$. ■

Особую значимость имеет случай деления многочлена на двучлен $x - a$.

Теорема 3. ***Остаток от деления многочлена $p(x)$ ненулевой степени на двучлен $x - a$ равен $p(a)$ (т. е. значению многочлена $p(x)$ при $x = a$).***

Доказательство. Если $p(x)$ — делимое, $x - a$ — делитель (многочлен первой степени), $q(x)$ — частное и r — остаток (число), то по формуле (2) получаем:

$$p(x) = (x - a)q(x) + r. \qquad (3)$$

Подставив в формулу (3) вместо x значение a, получим $p(a) = (a - a)q(a) + r$, т. е. $p(a) = r$, что и требовалось доказать.

Эту теорему обычно называют *теоремой Безу* в честь французского математика Этьена Безу (1730—1783).

Найдём, например, остаток от деления многочлена $p(x) = 2x^2 - x - 3$ на двучлен $x - 2$. По теореме Безу остаток равен $p(2)$. Имеем: $p(2) = 2 \cdot 2^2 - 2 - 3 = 3$.

Сравните это решение с решением примера 1. Там мы получили такой же остаток, но по-другому, использовав более сложные рассуждения.

Если при $x = a$ многочлен $p(x)$ обращается в нуль, т. е. выполняется равенство $p(a) = 0$, то число a называют **корнем многочлена.** Если $p(a) = 0$, то в формуле (3) $r = 0$ и она принимает вид $p(x) = (x - a)q(x)$. Это значит, что многочлен $p(x)$ делится на $x - a$. Тем самым получено следствие из теоремы 3.

Следствие. *Если число a является корнем многочлена $p(x)$, то $p(x)$ делится на двучлен $x - a$.*

Для деления многочлена на двучлен $x - a$ можно использовать специальный приём, который обычно называют *схемой Горнера.* Поясним суть этого приёма для случая, когда делимое — многочлен четвёртой степени (что, впрочем, непринципиально).

Пусть $p(x) = bx^4 + cx^3 + dx^2 + ex + f$. Разделив $p(x)$ на $x - a$, получим $p(x) = (x - a)q(x) + r$, где $q(x)$ — некоторый многочлен третьей степени, коэффициенты которого нам пока неизвестны: $q(x) = kx^3 + mx^2 + nx + s$. Итак,

$$bx^4 + cx^3 + dx^2 + ex + f = (kx^3 + mx^2 + nx + s)(x - a) + r. \quad (4)$$

Раскрыв скобки в правой части тождества (4), получим:

$$bx^4 + cx^3 + dx^2 + ex + f = kx^4 + (m - ka)x^3 + (n - ma)x^2 + (s - na)x + r - sa.$$

Воспользовавшись теоремой 1 о тождественности двух многочленов, приходим к следующей системе равенств: $b = k$, $c = m - ka$, $d = n - ma$, $e = s - na$, $f = r - sa$. Это значит, что неопределённые коэффициенты k, m, n, s, r связаны с известными коэффициентами a, b, c, d, e, f следующими соотношениями:

$$k = b;$$
$$m = ka + c;$$
$$n = ma + d;$$
$$s = na + e;$$
$$r = sa + f.$$

Эти соотношения удобно записать в виде следующей таблицы.

	b	c	d	e	f
f	$k = b$	$m = ka + c$	$n = ma + d$	$s = na + e$	$r = sa + f$

В верхней строке таблицы записаны коэффициенты делимого — заданного многочлена, а в первом столбце второй строки — заданное число a. В остальных столбцах второй строки последовательно получаются коэффициенты частного и остаток, при этом соблюдается следующий порядок ходов: во втором столбце второй строки записывается то же число, что во втором столбце первой строки; в третий столбец второй строки записывается число, равное сумме произведения числа из второго столбца второй строки на число a и числа, находящегося в третьем столбце первой строки; в четвёртый столбец второй строки записывается число, равное сумме произведения числа из третьего столбца второй строки на число a и числа, находящегося в четвёртом столбце первой строки; в пятый столбец второй строки записывается число, равное сумме произведения числа из четвёртого столбца второй строки на число a и числа, находящегося в пятом столбце первой строки; в шестой столбец второй строки записывается число, равное сумме произведения числа из пятого столбца второй строки на число a и числа, находящегося в шестом столбце первой строки.

Пример 3. Используя схему Горнера, разделить многочлен $p(x) = 2x^5 + x^4 - 3x^3 + 2x^2 + 5$ на двучлен $x + 2$.

Решение. Здесь $a = -2$ $(x + 2 = x - a)$, а коэффициенты многочлена-делимого равны соответственно 2, 1, −3, 2, 0, 5. Строим таблицу для применения схемы Горнера:

	2	1	−3	2	0	5
−2	2	$2 \cdot (-2) + 1 = -3$	$(-3) \cdot (-2) + (-3) = 3$	$3 \cdot (-2) + 2 = -4$	$(-4) \cdot (-2) + 0 = 8$	$8 \cdot (-2) + 5 = -11$

Итак, коэффициенты частного — числа 2, −3, 3, −4, 8, а остаток $r = -11$. Значит,

$$2x^5 + x^4 - 3x^3 + 2x^2 + 5 =$$
$$= (x + 2)(2x^4 - 3x^3 + 3x^2 - 4x + 8) - 11. \qquad \blacksquare$$

Схема Горнера удобна тем, что при её применении нужно использовать меньшее, чем при делении многочлена на многочлен уголком, число арифметических операций, и вообще она более компактна.

3. Разложение многочлена на множители

С различными приёмами разложения многочлена на множители вы познакомились в курсе алгебры 7—9-го классов. Напомним их.

1. *Вынесение общего множителя за скобки.* Это преобразование основано на распределительном законе умножения относительно сложения: $(a + b)c = ac + bc$, — только при разложении на множители этот закон прочитывается справа налево:

$$ac + bc = c(a + b).$$

2. *Способ группировки.* Законы сложения (переместительный, сочетательный) позволяют группировать члены многочлена любым способом. Иногда удаётся такая группировка, что в каждой группе после вынесения за скобки общих множителей в скобках остаётся один и тот же многочлен. Его как общий множитель можно вынести за скобки. В этом и состоит способ группировки.

Пример 4. Разложить на множители многочлен $x^3 - 3x^2 + 5x - 15$.

Решение. Произведём группировку слагаемых следующим образом: $(x^3 - 3x^2) + (5x - 15)$. В первой группе вынесем за скобки общий множитель x^2, во второй — множитель 5. Получим $x^2(x - 3) + 5(x - 3)$. Теперь двучлен $x - 3$ как общий множитель можно вынести за скобки: $(x - 3)(x^2 + 5)$.

Итак, $x^3 - 3x^2 + 5x - 15 = (x - 3)(x^2 + 5)$. ■

3. *Использование формул сокращённого умножения.* Из курса алгебры 7-го класса вам известны пять формул сокращённого умножения многочленов.

1) $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$.
2) $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.
3) $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$.
4) $(a + b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3$.
5) $(a - b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3$.

Добавим ещё две формулы. Рассмотрим выражение $(a - b)^3$. Имеем:

$$(a - b)^3 = (a - b)^2(a - b) = (a^2 - 2ab + b^2)(a - b) =$$
$$= a^3 - 2a^2b + ab^2 - a^2b + 2ab^2 - b^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3.$$

Итак,

6) $(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$ («куб разности»).

Аналогично выводится формула

7) $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ («куб суммы»).

Формулы 1)—7), будучи прочитанными справа налево, во многих случаях оказываются полезными для разложения многочлена на множители.

Пример 5. Разложить на множители многочлен $x^6 - 1$.

Решение. Представим $x^6 - 1$ в виде $(x^3)^2 - 1^2$. Воспользовавшись формулой 1) («разность квадратов»), получим $(x^3)^2 - 1^2 = (x^3 - 1)(x^3 + 1)$. Используя далее формулы 5) и 4) («разность кубов», «сумма кубов»), получим:

$$(x - 1)(x^2 + x + 1)(x + 1)(x^2 - x + 1).$$

Квадратные трёхчлены $x^2 + x + 1$, $x^2 - x + 1$ имеют отрицательные дискриминанты, а потому, как известно из курса алгебры 8-го класса, не разлагаются на линейные множители с действительными коэффициентами.

Итак, $x^6 - 1 = (x - 1)(x^2 + x + 1)(x + 1)(x^2 - x + 1)$. ■

Пример 6. Разложить на множители многочлен $16x^7 - 72x^6 + 108x^5 - 54x^4$.

Решение. $16x^7 - 72x^6 + 108x^5 - 54x^4 = 2x^4(8x^3 - 36x^2 + 54x - 27) = 2x^4((2x)^3 - 3 \cdot (2x)^2 \cdot 3 + 3 \cdot (2x) \cdot 3^2 - 3^3) = 2x^4(2x - 3)^3$.

В процессе решения мы использовали приём вынесения общего множителя за скобки и формулу «куб разности». ■

4. *Разложение квадратного трёхчлена на линейные множители.*

Если x_1 и x_2 — корни квадратного трёхчлена $ax^2 + bx + c$, то

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2). \quad (5)$$

Например, корнями квадратного трёхчлена $2x^2 - 5x - 7$ являются числа -1 и $3{,}5$, значит, $2x^2 - 5x - 7 = 2(x + 1)(x - 3{,}5) = (x + 1)(2x - 7)$.

Если, в частности, квадратный трёхчлен имеет один корень (дискриминант квадратного трёхчлена равен нулю), то для использования формулы (5) полагают $x_1 = x_2$ (*кратный корень*), и формула (5) принимает вид $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)^2$.

Если квадратный трёхчлен не имеет действительных корней (дискриминант отрицателен), то квадратный трёхчлен не разлагается на линейные множители с действительными коэффициентами.

Выше, в следствии из теоремы 3, был получен следующий результат: если число a является корнем многочлена $p(x)$, то $p(x)$ делится на двучлен $x - a$, т. е. может быть представлен в виде $p(x) = (x - a)q(x)$. Это ещё один приём разложения на множители многочлена от одной переменной. Отметим одну любопытную теорему, которая не раз позволит нам пользоваться указанным приёмом разложения многочлена на множители.

Теорема 4. ***Пусть все коэффициенты многочлена $p(x)$ — целые числа. Если целое число a является корнем многочлена $p(x)$, то a — делитель свободного члена многочлена $p(x)$.***

Доказательство, простоты ради, проведём для случая, когда $p(x)$ — многочлен третьей степени: $p(x) = bx^3 + cx^2 + dx + m$, где все коэффициенты b, c, d, m — целые числа. По условию целое число a является корнем многочлена $p(x)$. Это значит, что $p(a) = 0$, т. е.

$$ba^3 + ca^2 + da + m = 0.$$

Преобразуем полученное равенство к виду $m = a(-ba^2 - ca - d)$ и обозначим целое число $-ba^2 - ca - d$ буквой k. Тогда последнее равенство можно переписать в виде $m = ak$, а это и означает, что число a — делитель числа m, т. е. делитель свободного члена многочлена $p(x)$.

Аналогично проводится доказательство теоремы для случая, когда $p(x)$ — многочлен четвёртой, пятой и вообще n-й степени.

Пример 7. Разложить на множители многочлен

$$p(x) = x^3 - 3x^2 - 10x + 24.$$

Решение. Попробуем найти целочисленный корень этого многочлена. Если он есть, то по теореме 4 его следует искать среди делителей свободного члена заданного многочлена, т. е. среди делителей числа 24. Выпишем эти делители — «кандидаты в целочисленные корни»: $\pm1, \pm2, \pm3, \pm4, \pm6, \pm8, \pm12, \pm24$. Будем подставлять выписанные значения поочерёдно в выражение для $p(x)$. Имеем:

$$p(1) = 12 \neq 0,\ p(-1) = 30 \neq 0,\ p(2) = 0.$$

Итак, $x = 2$ — корень многочлена $p(x)$, а потому $p(x)$ можно представить в виде $(x - 2)q(x)$. Чтобы найти частное $q(x)$, можно разделить $p(x)$ на $x - 2$ уголком, можно использовать схему Горнера (сделайте это!), но мы покажем вам ещё один приём:

$$\begin{array}{r} -\ p(x) = x^3 - 3x^2 - 10x + 24 \\ p(2) = 2^3 - 3\cdot2^2 - 10\cdot2 + 24 \\ \hline p(x) - p(2) = (x^3 - 2^3) - 3(x^2 - 2^2) - 10(x - 2). \end{array}$$

Поскольку $p(2) = 0$, то

$$p(x) = (x - 2)(x^2 + 2x + 4) - 3(x - 2)(x + 2) - 10(x - 2) =$$
$$= (x - 2)((x^2 + 2x + 4) - 3(x + 2) - 10) = (x - 2)(x^2 - x - 12).$$

Квадратный трёхчлен $x^2 - x - 12$ имеет корни 4 и -3, значит,

$$x^2 - x - 12 = (x - 4)(x + 3).$$

Итак, $p(x) = (x - 2)(x - 4)(x + 3)$. ■

Завершая разговор о разложении на множители многочленов от одной переменной, отметим ещё одну важную алгебраическую теорему (о ней мы поговорим подробнее в § 10).

Теорема 5. ***Любой многочлен $p(x)$ степени $n \geqslant 3$ разлагается в произведение многочленов первой и второй степени.***

Вернёмся к примерам, рассмотренным в этом параграфе.

1) $x^3 - 3x^2 + 5x - 15 = (x - 3)(x^2 + 5)$ (см. пример 4). В полученном разложении на множители — один многочлен первой степени и один многочлен второй степени.

2) $x^6 - 1 = (x - 1)(x^2 + x + 1)(x + 1)(x^2 - x + 1)$ (см. пример 5). В полученном разложении на множители — два многочлена первой степени и два многочлена второй степени.

3) $x^3 - 3x^2 - 10x + 24 = (x - 2)(x - 4)(x + 3)$ (см. пример 7). В полученном разложении на множители — три многочлена первой степени.

4) $16x^7 - 72x^6 + 108x^5 - 54x^4 = 2xxxx(2x - 3)(2x - 3)(2x - 3)$ (см. пример 6). В полученном разложении на множители — семь многочленов первой степени.

В связи с последним разложением подчеркнём следующее обстоятельство: многочлен $16x^7 - 72x^6 + 108x^5 - 54x^4$ имеет всего два корня: 0 и 1,5. Но эти корни *кратные*: $x = 0$ — корень кратности 4, а $x = 1{,}5$ — корень кратности 3. Составляя разложение многочлена на множители, следует каждый корень многочлена учитывать столько раз, какова его кратность.

Вопросы для самопроверки

1. Сформулируйте теорему о тождественности двух многочленов от одной переменной.

2. Дано тождество $x^3 - 5x^2 + 2x + 3 = ax^3 + bx^2 + (a + 1)x + b^2 - 12$. Найдите значения параметров a и b.

3. Сформулируйте теорему о делении с остатком многочлена на многочлен.

4. Сформулируйте теорему Безу.

5. Найдите остаток от деления многочлена $2x^5 + x^4 - 3x^2 + x + 1$ на двучлен $x - 1$.

6. Не производя деления, выясните, делится ли многочлен $x^3 + 2x^2 + 7x + 6$ на двучлен $x + 1$.

7. Известно, что многочлен $x^3 - 2x^2 - 5x + 6$ имеет целочисленные корни. Какие из указанных ниже чисел могут быть корнями многочлена: 1, −1, 2, −2, 3, −3, 4, −4, 5, −5, 6, −6?

8. Найдите корни многочлена $x^3 - 2x^2 - 5x + 6$ и разложите его на множители.

§ 2. Многочлены от нескольких переменных

Многочлены от нескольких переменных можно складывать, вычитать, перемножать, возводить в натуральную степень, разлагать на множители — это вам известно из курса алгебры 7—9-го классов. В настоящем параграфе мы несколько расширим ваши знания о многочленах.

Пример 1. Разложить на множители многочлен

$$2x^2 - 5xy + 2y^2.$$

Решение. Первый способ. Воспользуемся методом группировки:

$$2x^2 - 5xy + 2y^2 = 2x^2 - 4xy - xy + 2y^2 = 2x(x - 2y) - y(x - 2y) = \\ = (x - 2y)(2x - y).$$

Второй способ. Рассмотрим данный многочлен от двух переменных как квадратный трёхчлен от переменной x с коэффициентами 2, $-5y$, $2y^2$ соответственно. Найдём его корни: $x = \frac{5y \pm \sqrt{25y^2 - 4 \cdot 2 \cdot 2y^2}}{4} = \frac{5y \pm 3y}{4}$. Значит, либо $x = 2y$, либо $x = \frac{y}{2}$. Применив к квадратному трёхчлену формулу разложения на линейные множители, получим: $2x^2 - 5xy + 2y^2 = 2(x - 2y)\left(x - \frac{y}{2}\right) = (x - 2y)(2x - y)$. ■

Пример 2. Разложить на множители:

а) $x^n - y^n$ ($n \in N$); б) $x^{2n+1} + y^{2n+1}$ ($n \in N$).

Решение. а) Первый способ. Воспользуемся идеей второго способа решения предыдущего примера. Зафиксируем произвольно числовое значение переменной y и рассмотрим выражение $x^n - y^n$ как многочлен только от одной переменной x. Если $x = y$, то этот многочлен обращается в нуль, т. е. число y является корнем многочлена. По следствию из теоремы Безу этот многочлен делится на $x - y$, т. е. $x^n - y^n = (x - y)q(x)$, где $q(x)$ — некоторый многочлен степени $n - 1$:

$$q(x) = a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + a_{n-3}x^{n-3} + \ldots + a_2x^2 + a_1x + a_0.$$

Значит,

$$x^n - y^n = (x - y)(a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + a_{n-3}x^{n-3} + \ldots + a_2x^2 + \\ + a_1x + a_0),$$

т. е.

$$x^n - y^n = a_{n-1}x^n + (a_{n-2} - ya_{n-1})x^{n-1} + (a_{n-3} - ya_{n-2})x^{n-2} + \dots + \\ +(a_1 - ya_2)x^2 + (a_0 - ya_1)x - ya_0.$$

Применим к полученному равенству теорему 1 из § 1 о тождественности двух многочленов от одной переменной x. Получим:

$$\begin{aligned} &a_{n-1} = 1; \\ &a_{n-2} - ya_{n-1} = 0; \\ &a_{n-3} - ya_{n-2} = 0; \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &a_1 - ya_2 = 0; \\ &a_0 - ya_1 = 0; \\ &-ya_0 = -y^n. \end{aligned}$$

Из этих равенств последовательно получаем:

$a_{n-1} = 1$, $a_{n-2} = y$, $a_{n-3} = y^2$, ..., $a_2 = y^{n-3}$, $a_1 = y^{n-2}$, $a_0 = y^{n-1}$.

Таким образом,

$$x^n - y^n = (x - y)(a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + a_{n-3}x^{n-3} + \dots + \\ + a_2x^2 + a_1x + a_0) = (x - y)(1 \cdot x^{n-1} + yx^{n-2} + y^2x^{n-3} + \dots + \\ + y^{n-3}x^2 + y^{n-2}x + y^{n-1}).$$

Получили следующую формулу разложения на множители:

$$x^n - y^n = (x - y)(x^{n-1} + x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 + \dots + x^2y^{n-3} + \\ + xy^{n-2} + y^{n-1}).$$

Из неё, в частности, получаем:

$$x^2 - y^2 = (x - y)(x + y);$$
$$x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2);$$
$$x^4 - y^4 = (x - y)(x^3 + x^2y + xy^2 + y^3);$$
$$x^5 - y^5 = (x - y)(x^4 + x^3y + x^2y^2 + xy^3 + y^4).$$

<u>Второй способ.</u> Рассмотрим конечную геометрическую прогрессию $1, q, q^2, \dots, q^{n-1}$. Найдём её сумму S_n, используя известную из курса алгебры 9-го класса формулу: $S_n = \dfrac{b_1(q^n - 1)}{q - 1}$, $q \neq 1$.

Получим:

$$1 + q + q^2 + \dots + q^{n-2} + q^{n-1} = \frac{q^n - 1}{q - 1}, \text{ или}$$

$$q^n - 1 = (q - 1)(q^{n-1} + q^{n-2} + \dots + q + 1). \qquad (1)$$

Заметим, что это равенство верно и при $q = 1$ (обе его части в этом случае равны нулю).

Положим в формуле (1) $q = \frac{x}{y}$, $y \neq 0$. Получим:

$$\left(\frac{x}{y}\right)^n - 1 = \left(\frac{x}{y} - 1\right)\left(\left(\frac{x}{y}\right)^{n-1} + \left(\frac{x}{y}\right)^{n-2} + \ldots + \left(\frac{x}{y}\right)^2 + \frac{x}{y} + 1\right);$$

$$\frac{x^n - y^n}{y^n} = \frac{x - y}{y} \cdot \frac{x^{n-1} + x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 + \ldots + xy^{n-2} + y^{n-1}}{y^{n-1}};$$

$$x^n - y^n = (x - y)(x^{n-1} + x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 + \ldots + x^2y^{n-3} + xy^{n-2} + y^{n-1}).$$

Заметим, что если $y = 0$, то это равенство также верно, так как имеет вид $x^n = x^n$. Значит, это равенство верно при любых значениях переменных x и y.

б) Представим заданный двучлен в следующем виде:

$$x^{2n+1} + y^{2n+1} = x^{2n+1} - (-y)^{2n+1}.$$

К полученной разности применим формулу, доказанную в пункте а):

$$x^{2n+1} - (-y)^{2n+1} =$$
$$= (x - (-y))(x^{2n} + x^{2n-1}(-y) + x^{2n-2}(-y)^2 + x^{2n-3}(-y)^3 + \ldots +$$
$$+ x^2(-y)^{2n-2} + x(-y)^{2n-1} + (-y)^{2n}).$$

Таким образом, получили следующую формулу разложения на множители:

$$x^{2n+1} + y^{2n+1} = (x + y)(x^{2n} - x^{2n-1}y + x^{2n-2}y^2 - x^{2n-3}y^3 + \ldots +$$
$$+ x^2y^{2n-2} - xy^{2n-1} + y^{2n}).$$

Из неё, в частности, получаем:

$$x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2);$$
$$x^5 + y^5 = (x + y)(x^4 - x^3y + x^2y^2 - xy^3 + y^4).$$ ■

Пример 3. Вывести формулу сокращённого умножения для «квадрата суммы» $(x + y + z + u)^2$.

Решение. $(x + y + z + u)^2 = ((x + y) + (z + u))^2 = (x + y)^2 + (z + u)^2 + 2(x + y)(z + u) = x^2 + y^2 + z^2 + u^2 + 2(xy + xz + xu + yz + yu + zu)$.

Итак,

$$(x + y + z + u)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + u^2 + 2(xy + xz + xu +$$
$$+ yz + yu + zu).$$ ■

Формулу, полученную в примере 3, можно обобщить:

$$(x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_{n-1} + x_n)^2 =$$
$$= x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \ldots + x_{n-1}^2 + x_n^2 + 2(x_1x_2 + x_1x_3 + \ldots + x_1x_n +$$
$$+ x_2x_3 + \ldots + x_{n-1}x_n).$$

Среди многочленов от двух переменных выделяют *однородные* и *симметрические* многочлены.

Многочлен $p(x;\ y)$ называют **однородным многочленом n-й степени**, если сумма показателей степеней переменных в каждом члене многочлена равна n. Если $p(x;\ y)$ — однородный многочлен, то уравнение $p(x;\ y) = 0$ называют **однородным уравнением.**

Приведём примеры.

1) $p(x;\ y) = 2x + 3y$ — однородный многочлен первой степени; соответственно, $2x + 3y = 0$ — однородное уравнение первой степени.

2) $p(x;\ y) = 3x^2 + 5xy - 7y^2$ — однородный многочлен второй степени; соответственно, $3x^2 + 5xy - 7y^2 = 0$ — однородное уравнение второй степени.

3) $p(x;\ y) = x^3 + 4xy^2 - 5y^3$ — однородный многочлен третьей степени; соответственно, $x^3 + 4xy^2 - 5y^3 = 0$ — однородное уравнение третьей степени.

4) $p(x;\ y) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1}y + a_{n-2}x^{n-2}y^2 + a_{n-3}x^{n-3}y^3 + \ldots + a_1xy^{n-1} + a_0y^n$ — общий вид однородного многочлена n-й степени.

Существует достаточно изящный способ решения однородных уравнений. Поясним его суть на двух примерах.

Пример 4. Решить уравнение $x^3 + 4xy^2 - 5y^3 = 0$.

Решение. Заметим прежде всего, что если в заданном уравнении положить $x = 0$, то получится $y = 0$; это значит, что пара $(0;\ 0)$ является решением однородного уравнения.

Пусть теперь $x \neq 0$. Разделив почленно обе части заданного однородного уравнения третьей степени на x^3, получим:

$$1 + 4\left(\frac{y}{x}\right)^2 - 5\left(\frac{y}{x}\right)^3 = 0.$$

Введём новую переменную $z = \frac{y}{x}$. Тогда уравнение примет вид $1 + 4z^2 - 5z^3 = 0$. Далее последовательно находим:

$$5z^3 - 4z^2 - 1 = 0;$$
$$(5z^3 - 5z^2) + (z^2 - 1) = 0;$$
$$5z^2(z - 1) + (z - 1)(z + 1) = 0;$$
$$(z - 1)(5z^2 + z + 1) = 0.$$

Из уравнения $z - 1 = 0$ находим $z = 1$, уравнение $5z^2 + z + 1 = 0$ не имеет действительных корней.

Если $z = 1$, то $\frac{y}{x} = 1$, т. е. $y = x$. Это значит, что любая пара вида $(t; t)$ является решением заданного однородного уравнения. Между прочим, и отмеченная выше пара $(0; 0)$ также входит в указанный перечень решений.

Ответ: $(t; t)$, где t — любое действительное число.

Пример 5. Решить уравнение

$$2x^3 - 5x^2y + 2xy^2 = 0.$$

Решение. Имеем $x(2x^2 - 5xy + 2y^2) = 0$. Значит, либо $x = 0$, либо $2x^2 - 5xy + 2y^2 = 0$. Первый случай можно истолковать так: заданному уравнению удовлетворяют пары вида $(0; t)$, где t — любое действительное число. Во втором случае, разделив обе части однородного уравнения второй степени $2x^2 - 5xy + 2y^2 = 0$ почленно на x^2, получим:

$$2 - 5\left(\frac{y}{x}\right) + 2\left(\frac{y}{x}\right)^2 = 0.$$

Введём новую переменную $z = \frac{y}{x}$. Тогда уравнение примет вид $2z^2 - 5z + 2 = 0$, откуда находим: $z_1 = 2$, $z_2 = \frac{1}{2}$, т. е. либо $\frac{y}{x} = 2$, а потому $y = 2x$, либо $\frac{y}{x} = \frac{1}{2}$, а потому $x = 2y$. Это значит, что любая пара вида $(t; 2t)$ или $(2t; t)$ является решением заданного однородного уравнения.

Ответ: $(0; t)$, $(t; 2t)$, $(2t; t)$, где t — любое действительное число.

Замечание. Вернёмся ещё раз к последнему однородному уравнению. Каков содержательный смысл той информации, которая содержится в ответе? Она сразу даёт возможность для любой пары чисел ответить на вопрос, является эта пара решением уравнения или нет. Например, решениями заданного однородного уравнения являются:

$(0; 0)$, $(0; -5)$, $(0; \sqrt{5})$ (это пары вида $(0; t)$);

$(1; 2)$, $(-4; -8)$, $\left(\sqrt{7}; 2\sqrt{7}\right)$ (это пары вида $(t; 2t)$);

$(6; 3)$, $(-7; -3{,}5)$, $\left(\frac{4}{7}; \frac{2}{7}\right)$ (это пары вида $(2t; t)$).

В то же время такие, например, пары, как (5; 5), (3; 0), (2,5; 0,7) не являются решениями уравнения.

Систему уравнений $\begin{cases} p(x; y) = a, \\ q(x; y) = b \end{cases}$ называют **однородной**, если $p(x; y)$, $q(x; y)$ — однородные многочлены одной и той же степени, а a и b — действительные числа.

Идея решения однородной системы достаточно проста, она сводится к тому, чтобы с помощью составления некоторой комбинации уравнений системы получить однородное уравнение. Впрочем, если в заданной системе $a = 0$ или $b = 0$, то в системе уже есть однородное уравнение, которое, как мы видели выше, решается методом введения новой переменной $z = \frac{y}{x}$. Если оба числа a, b отличны от нуля, то, умножив первое уравнение системы на b, а второе — на a, получим:

$$\begin{cases} bp(x; y) = ab, \\ aq(x; y) = ab, \end{cases}$$

откуда находим, что $bp(x; y) - aq(x; y) = 0$; это однородное уравнение.

Пример 6. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x^3 + y^3 = 1, \\ x^2y + 2xy^2 + y^3 = 2. \end{cases}$$

Решение. Левые части обоих уравнений системы — однородные многочлены третьей степени, значит, система является однородной. Имеем:

$$\begin{cases} 2(x^3 + y^3) = 2, \\ x^2y + 2xy^2 + y^3 = 2. \end{cases}$$

Значит, $2(x^3 + y^3) = x^2y + 2xy^2 + y^3$, т. е. $2x^3 - x^2y - 2xy^2 + y^3 = 0$. Получили однородное уравнение третьей степени. Решим его.

Если $x = 0$, то $y = 0$; пара (0; 0) — решение однородного уравнения. Если $x \neq 0$, то можно обе части уравнения разделить почленно на x^3; получим: $2 - \left(\frac{y}{x}\right) - 2\left(\frac{y}{x}\right)^2 + \left(\frac{y}{x}\right)^3 = 0$. Введя новую переменную $z = \frac{y}{x}$, получим уравнение $z^3 - 2z^2 - z + 2 = 0$.

Решим его:

$$z^2(z-2)-(z-2)=0;$$
$$(z-2)(z^2-1)=0;$$
$$z_1=2,\ z_2=1,\ z_3=-1.$$

Значит, либо $\frac{y}{x}=2$, т. е. $y=2x$, либо $\frac{y}{x}=1$, т. е. $y=x$, либо $\frac{y}{x}=-1$, т. е. $y=-x$.

В итоге приходим к совокупности трёх систем, каждая из которых без труда решается методом подстановки:

$$\begin{cases} y=2x, \\ x^3+y^3=1; \end{cases} \quad \begin{cases} y=x, \\ x^3+y^3=1; \end{cases} \quad \begin{cases} y=-x, \\ x^3+y^3=1. \end{cases}$$

Подставив $2x$ вместо y во второе уравнение первой системы, получим $9x^3=1$, $x^3=\frac{1}{9}$. Удобнее переписать последнее уравнение в виде $x^3=\frac{3}{27}$. Тогда $x=\sqrt[3]{\frac{3}{27}}=\frac{\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{27}}=\frac{\sqrt[3]{3}}{3}$, а $y=2x=\frac{2\sqrt[3]{3}}{3}$ (с кубическими корнями вы познакомились в курсе алгебры 9-го класса). Итак, первая система имеет решение $\left(\frac{\sqrt[3]{3}}{3};\ \frac{2\sqrt[3]{3}}{3}\right)$.

Подставив x вместо y во второе уравнение первой системы, получим $2x^3=1$, $x^3=\frac{1}{2}$. Удобнее переписать последнее уравнение в виде $x^3=\frac{4}{8}$. Тогда $x=\sqrt[3]{\frac{4}{8}}=\frac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{8}}=\frac{\sqrt[3]{4}}{2}$, $y=\frac{\sqrt[3]{4}}{2}$. Итак, вторая система имеет решение $\left(\frac{\sqrt[3]{4}}{2};\ \frac{\sqrt[3]{4}}{2}\right)$.

Подставив $-x$ вместо y во второе уравнение третьей системы, получим $0=1$, чего не может быть. Значит, третья система не имеет решений.

Ответ: $\left(\frac{\sqrt[3]{4}}{2};\ \frac{\sqrt[3]{4}}{2}\right)$; $\left(\frac{\sqrt[3]{3}}{3};\ \frac{2\sqrt[3]{3}}{3}\right)$.

Теперь поговорим о симметрических многочленах и об использовании их при решении систем уравнений. Многочлен $p(x;\ y)$

называют **симметрическим**, если он сохраняет свой вид при одновременной замене x на y и y на x. Например, симметрическим является двучлен $x^2y + xy^2$. В самом деле, при одновременной замене x на y и y на x получится двучлен $y^2x + yx^2$, но это то же самое, что $x^2y + xy^2$. Другие примеры симметрических многочленов:

$$xy,\ x + y,\ x^2 + y^2,\ x^3 + y^3,\ x^4 + y^4,\ 2x^3y + 3x^2y^2 - x^4 - y^4 + 2xy^3$$

и т. д.

В предыдущей строке написаны шесть симметрических многочленов. Первые два из них считаются *основными* в том смысле, что любые другие симметрические многочлены можно представить в виде некоторой комбинации многочленов $x + y$ и xy.

Теорема. ***Любой симметрический многочлен $p(x; y)$ можно представить в виде многочлена от xy и $x + y$.***

Например,

$$x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy;$$

$$x^3 + y^3 = (x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3) - (3x^2y + 3xy^2) =$$
$$= (x + y)^3 - 3xy(x + y);$$

$$x^4 + y^4 = (x^2 + y^2)^2 - 2x^2y^2 = ((x + y)^2 - 2xy)^2 - 2(xy)^2;$$

$$2x^3y + 3x^2y^2 - x^4 - y^4 + 2xy^3 =$$
$$= 2xy(x^2 + y^2) - (x^4 + y^4) + 3(xy)^2 \text{ и т. д.}$$

Уравнение $p(x; y) = a$, где $a \in \boldsymbol{R}$, называют **симметрическим**, если $p(x; y)$ — симметрический многочлен. Систему двух уравнений с двумя переменными называют **симметрической системой**, если оба её уравнения — симметрические. Идея решения симметрической системы фактически предопределена проведёнными выше рассуждениями; вводят две новые переменные: $x + y = u$, $xy = v$.

Пример 7. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x^3 + x^3y^3 + y^3 = 17, \\ x + xy + y = 5. \end{cases}$$

Решение. Введём две новые переменные: $x + y = u$, $xy = v$. Воспользуемся при этом полученным выше выражением $x^3 + y^3$ через $x + y$ и xy:

$$x^3 + y^3 = (x + y)^3 - 3xy(x + y).$$

Тогда заданная система примет вид:

$$\begin{cases} u^3 - 3uv + v^3 = 17, \\ u + v = 5. \end{cases}$$

Выразим v из второго уравнения: $v = 5 - u$. Подставим полученное выражение вместо v в первое уравнение системы:

$$u^3 - 3u(5 - u) + (5 - u)^3 = 17;$$
$$u^3 - 15u + 3u^2 + 125 - 75u + 15u^2 - u^3 = 17;$$
$$18u^2 - 90u + 108 = 0;$$
$$u^2 - 5u + 6 = 0;$$
$$u_1 = 2, u_2 = 3.$$

Соответственно находим $v_1 = 3$, $v_2 = 2$.

Осталось решить две простые системы уравнений:

$$\begin{cases} x + y = 2, \\ xy = 3; \end{cases} \quad \begin{cases} x + y = 3, \\ xy = 2. \end{cases}$$

Первая система не имеет действительных решений, из второй находим два решения (1; 2); (2; 1).

Ответ: (1; 2); (2; 1).

Вопросы для самопроверки

1. Приведите пример однородного многочлена $p(x; y)$ второй степени; третьей степени.

2. Что такое однородное уравнение третьей степени с двумя переменными? Приведите пример.

3. Решите уравнение $x^2 - 5xy + 6y^2 = 0$.

4. В каком случае систему $\begin{cases} p(x; y) = a, \\ q(x; y) = b \end{cases}$ называют однородной? Опишите алгоритм её решения.

5. Что такое симметрический многочлен $p(x; y)$? Приведите два примера симметрических многочленов.

6. В каком случае систему $\begin{cases} p(x; y) = a, \\ q(x; y) = b \end{cases}$ называют симметрической? В чём состоит идея решения симметрической системы?

§ 3. Уравнения высших степеней

В этом параграфе мы поговорим о решении уравнений вида $P(x) = 0$, где $P(x)$ — многочлен, степень которого выше второй. Имеется два основных метода решения таких уравнений: метод разложения на множители и метод введения новой переменной.

Сущность *метода разложения на множители*, напомним, состоит в следующем. Дано уравнение $P(x) = 0$, где $P(x)$ — многочлен, степень которого выше второй. Предположим, что нам удалось разложить многочлен на множители: $P(x) = P_1(x)\,P_2(x)\,P_3(x)$. Тогда заданное уравнение примет вид:

$$P_1(x)\,P_2(x)\,P_3(x) = 0.$$

Значит, либо $P_1(x) = 0$, либо $P_2(x) = 0$, либо $P_3(x) = 0$. Обычно в таких случаях говорят так: получили *совокупность уравнений*

$$P_1(x) = 0; \quad P_2(x) = 0; \quad P_3(x) = 0.$$

Используют и такую терминологию: уравнение $P(x) = 0$ *равносильно* совокупности уравнений $P_1(x) = 0$, $P_2(x) = 0$, $P_3(x) = 0$. Множество корней уравнения $P(x) = 0$ представляет собой объединение множеств корней уравнений $P_1(x) = 0$, $P_2(x) = 0$, $P_3(x) = 0$.

Для разложения многочлена на множители используют известные приёмы (вынесение общего множителя за скобки, формулы сокращённого умножения, группировка, разложение квадратного трёхчлена на линейные множители). Так, в § 2 мы уже использовали метод разложения на множители для решения уравнений третьей степени $1 + 4z^2 - 5z^3 = 0$ (см. пример 4) и $z^3 - 2z^2 - z + 2 = 0$ (см. пример 6). В том же параграфе мы несколько раз воспользовались методом введения новой переменной (см. примеры 4—7). Приведём ещё один пример.

Пример 1. Решить уравнение $x(x - 1)(x - 2)(x - 3) = 24$.

Решение. Заметив, что $x(x - 3) = x^2 - 3x$, а $(x - 1)(x - 2) = x^2 - 3x + 2$, перепишем уравнение в виде $(x^2 - 3x)(x^2 - 3x + 2) = 24$. Введя новую переменную $y = x^2 - 3x$, преобразуем уравнение к виду $y(y + 2) = 24$ и, далее, $y^2 + 2y - 24 = 0$. Корнями этого квадратного уравнения служат числа 4 и -6.

Возвращаясь к переменной x, мы должны решить два уравнения:

$$x^2 - 3x = 4; \quad x^2 - 3x = -6.$$

Из первого уравнения находим $x_1 = 4$, $x_2 = -1$; второе уравнение не имеет действительных корней.

Ответ: 4; -1.

При решении уравнений высших степеней используются теоремы из § 1; напомним их.

1. Если все коэффициенты многочлена $P(x)$ — целые числа и если $x = a$ — целочисленный корень многочлена $P(x)$, то число a является делителем свободного члена многочлена $P(x)$.

2. Если $x = a$ — корень многочлена $P(x)$, то $P(x)$ делится без остатка на двучлен $x - a$.

Докажем ещё одно полезное утверждение.

Теорема. ***Если приведённое уравнение с целыми коэффициентами имеет рациональный корень, то этот корень обязательно является целым числом.***

Доказательство. (Проведём его на примере уравнения третьей степени, что непринципиально). Дано уравнение $x^3 + bx^2 + cx + d = 0$, где b, c, d — целые числа. Предположим, что оно имеет рациональный корень $x = \frac{p}{q}$, где $\frac{p}{q}$ — несократимая дробь (т. е. p, q — взаимно простые числа). Подставив это значение в уравнение, получим:

$$\left(\frac{p}{q}\right)^3 + b\left(\frac{p}{q}\right)^2 + c\left(\frac{p}{q}\right) + d = 0;$$

$$p^3 + bp^2q + cpq^2 + dq^3 = 0;$$

$$p^3 = q(-bp^2 - cpq - dq^2).$$

Обозначив числовое выражение в скобках буквой m, получим $p^3 = qm$. Это значит, что $p^3 \vdots q$, или, что то же самое, $(p^2 \cdot p) \vdots q$ (напомним, что символ $\vdots$ заменяет словосочетание «делится на»). В курсе 10-го класса мы отмечали следующее свойство делимости: если произведение двух натуральных (или целых, это несущественно) чисел делится на натуральное число q и один из множителей взаимно прост с q, то второй множитель делится на q. По условию числа p и q взаимно просты. Значит, $p^2 \vdots q$, или, что то же самое, $(p \cdot p) \vdots q$. Ещё раз воспользовавшись упомянутым свойством делимости, получим, что $p \vdots q$. В силу взаимной простоты чисел p и q последнее соотношение возможно лишь в случае, когда $q = 1$ и, следовательно, $x = p$ — целочисленный корень уравнения.

Как доказанная теорема применяется на практике? Если дано приведённое уравнение с целыми коэффициентами, то методом проб следует найти целочисленный корень уравнения — среди делителей свободного члена. Если это не удаётся, приходится констатировать, что рациональных корней у уравнения нет и, следовательно, для его решения надо либо пользоваться готовыми формулами (они известны для уравнений третьей и четвёртой степеней, но достаточно сложны), либо что-то изобретать (разлагать на множители, вводить новую переменную). Если же дано неприведённое уравнение, то существуют способы замены переменной, обращающие уравнение в приведённое, мы покажем их ниже на примерах.

Пример 2. Решить уравнение $x^3 + 2x^2 - 7x - 12 = 0$.

Решение. Попробуем найти целочисленный корень уравнения, искать его следует среди делителей числа -12, т. е. среди чисел ±1, ±2, ±3, ±4, ±6, ±12. Положим $p(x) = x^3 + 2x^2 - 7x - 12$. Имеем $p(1) = -16$, $p(-1) = -4$, $p(2) = -10$, $p(-2) = 2$, $p(3) = 12$, $p(-3) = 0$.

Итак, $x_1 = -3$ — корень заданного уравнения. Разделим $p(x)$ на $x + 3$; воспользуемся приёмом, показанным в § 1 в примере 7:

$$\begin{array}{r} - \begin{array}{r} p(x) = x^3 + 2x^2 - 7x - 12 \\ p(-3) = -27 + 18 + 21 - 12 \end{array} \\ \hline p(x) - p(-3) = (x^3 + 27) + 2(x^2 - 9) - 7(x + 3). \end{array}$$

Значит,

$$p(x) = (x + 3)(x^2 - 3x + 9) + 2(x + 3)(x - 3) - 7(x + 3) =$$
$$= (x + 3)(x^2 - 3x + 9 + 2x - 6 - 7) = (x + 3)(x^2 - x - 4).$$

Из уравнения $x^2 - x - 4 = 0$ находим ещё два корня заданного уравнения:

$$x_{2,3} = \frac{1 \pm \sqrt{17}}{2}.$$

Ответ: -3; $\dfrac{1 \pm \sqrt{17}}{2}$.

Пример 3. Решить уравнение $21x^3 + x^2 - 5x - 1 = 0$.

Решение. Если свободный член уравнения равен 1 или -1, то уравнение преобразуется в приведённое уравнение с помощью замены $x = \dfrac{1}{y}$. Смотрите:

$$21\left(\frac{1}{y}\right)^3 + \left(\frac{1}{y}\right)^2 - 5\left(\frac{1}{y}\right) - 1 = 0;$$

$$21 + y - 5y^2 - y^3 = 0;$$
$$y^3 + 5y^2 - y - 21 = 0.$$

Среди делителей числа -21 методом проб (как в примере 2) найдём целочисленный корень последнего уравнения: $y_1 = -3$. Разделив многочлен $y^3 + 5y^2 - y - 21$ на $y + 3$, получим квадратный трёхчлен $y^2 + 2y - 7$ с корнями $y_{2,3} = -1 \pm 2\sqrt{2}$. Так как $x = \dfrac{1}{y}$, то

$$x_1 = \frac{1}{y_1} = -\frac{1}{3},\ x_2 = \frac{1}{y_2} = \frac{1}{2\sqrt{2} - 1} = \frac{2\sqrt{2} + 1}{(2\sqrt{2} - 1)(2\sqrt{2} + 1)} =$$

$$= \frac{2\sqrt{2} + 1}{7},\ x_3 = \frac{1 - 2\sqrt{2}}{7}. \quad ■$$

П р и м е р 4. Решить уравнение $4x^3 - 10x^2 + 14x - 5 = 0$.

Р е ш е н и е. Умножим обе части уравнения на 2:

$$8x^3 - 20x^2 + 28x - 10 = 0;$$

$$(2x)^3 - 5 \cdot (2x)^2 + 14 \cdot (2x) - 10 = 0.$$

Введя новую переменную $y = 2x$, получим приведённое уравнение $y^3 - 5y^2 + 14y - 10 = 0$. Целочисленный корень уравнения очевиден: $y_1 = 1$. Разделив многочлен $y^3 - 5y^2 + 14y - 10$ на $y - 1$, получим квадратный трёхчлен $y^2 - 4y + 10$, не имеющий действительных корней. Так как $x = \frac{y}{2}$, то $x_1 = \frac{y_1}{2} = \frac{1}{2}$ — единственный корень уравнения.

Ответ: 0,5.

Уравнение вида $ax^4 + bx^3 + cx^2 + bx + a = 0$ (где все коэффициенты отличны от нуля) называют *возвратным* (первые два коэффициента a и b как бы *возвращаются* в последних двух членах уравнения). Возвратные уравнения решаются методом введения новой переменной. Если разделить обе части уравнения почленно на x^2 (что вполне законно, поскольку значение $x = 0$ не является корнем уравнения), получим:

$$ax^2 + bx + c + \frac{b}{x} + \frac{a}{x^2} = 0; \quad a\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + b\left(x + \frac{1}{x}\right) + c = 0. \quad (1)$$

Пусть $y = x + \frac{1}{x}$, тогда $y^2 = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2$, откуда находим, что $x^2 + \frac{1}{x^2} = y^2 - 2$. С помощью новой переменной y уравнение (1) можно переписать в виде $a(y^2 - 2) + by + c = 0$. Предположим, что это квадратное уравнение имеет корни y_1 и y_2. Тогда, возвращаясь к переменной x, остаётся лишь решить два уравнения: $x + \frac{1}{x} = y_1$; $x + \frac{1}{x} = y_2$.

Уравнение вида $ax^4 + bx^3 + cx^2 + kbx + k^2a = 0$ (где все коэффициенты отличны от нуля) также называют *возвратным*. Здесь после почленного деления на x^2 получаем:

$$ax^2 + bx + c + b\frac{k}{x} + a\left(\frac{k}{x}\right)^2 = 0; \; a\left(x^2 + \frac{k^2}{x^2}\right) + b\left(x + \frac{k}{x}\right) + c = 0. \; (2)$$

Если $y = x + \frac{k}{x}$, то $y^2 = \left(x + \frac{k}{x}\right)^2$, откуда $x^2 + \frac{k^2}{x^2} = y^2 - 2k$.

С помощью новой переменной y уравнение (2) можно переписать в виде квадратного уравнения

$$a(y^2 - 2k) + by + c = 0.$$

Если это уравнение имеет корни y_1 и y_2, то остаётся решить два уравнения:

$$x + \frac{k}{x} = y_1; \; x + \frac{k}{x} = y_2.$$

Пример 5. Решить уравнение $3x^4 - 2x^3 - 9x^2 - 4x + 12 = 0$.

Решение. Имеем: $3x^4 - 2x^3 - 9x^2 - (2 \cdot 2)x + 2^2 \cdot 3 = 0$. Это возвратное уравнение. Разделим обе его части почленно на x^2:

$$3x^2 - 2x - 9 - 2 \cdot \frac{2}{x} + 3\left(\frac{2}{x}\right)^2 = 0;$$

$$3\left(x^2 + \frac{4}{x^2}\right) - 2\left(x + \frac{2}{x}\right) - 9 = 0. \qquad (3)$$

Пусть $y = x + \frac{2}{x}$, тогда $y^2 = \left(x + \frac{2}{x}\right)^2$, откуда находим, что $x^2 + \frac{4}{x^2} = y^2 - 4$. С помощью новой переменной y уравнение (3) можно переписать в виде $3(y^2 - 4) - 2y - 9 = 0$, т. е. $3y^2 - 2y - 21 = 0$. Найдём корни этого квадратного уравнения: $y_1 = 3$, $y_2 = -\frac{7}{3}$. Значит, либо $x + \frac{2}{x} = 3$, либо $x + \frac{2}{x} = -\frac{7}{3}$. Из первого уравнения находим $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, а второе уравнение не имеет действительных корней.

Ответ: 1; 2.

Пример 6. Решить уравнение $2(x^2 + x + 1)^2 - 7(x - 1)^2 = 13(x^3 - 1)$.

Решение. Введём две новые переменные: $u = x^2 + x + 1$, $v = x - 1$. Тогда уравнение примет вид $2u^2 - 13uv - 7v^2 = 0$. Это однородное уравнение второй степени, о решении таких уравнений мы говорили в § 2. Разделив обе части уравнения почленно на v^2 и введя новую переменную $y = \frac{u}{v}$, получим квадратное уравнение $2y^2 - 13y - 7 = 0$ с корнями $y_1 = 7$, $y_2 = -\frac{1}{2}$. Значит, либо $\frac{u}{v} = 7$, т. е. $u = 7v$, либо $\frac{u}{v} = -\frac{1}{2}$, т. е. $v = -2u$.

Возвращаясь к переменной x, переписываем соотношение $u = 7v$ в виде $x^2 + x + 1 = 7(x - 1)$, т. е. $x^2 - 6x + 8 = 0$; $x_1 = 2$, $x_2 = 4$.

Переписываем второе соотношение $v = -2u$ в виде $x - 1 = -2(x^2 + x + 1)$, т. е. $2x^2 + 3x + 1 = 0$; $x_3 = -1$, $x_4 = -\frac{1}{2}$.

Ответ: 2; 4; -1; $-\frac{1}{2}$.

Кроме метода разложения на множители и метода введения новых переменных, при решении уравнений высших степеней, как, впрочем, и при решении любых других видов уравнений, используются различные функционально-графические приёмы. О них мы поговорим в заключительных примерах этого параграфа.

Пример 7. Решить уравнение

$$x^5 + 5x - 42 = 0.$$

Решение. В курсе алгебры и начал математического анализа 10-го класса мы уже пользовались тем фактом, что если функция $y = f(x)$ возрастает, а функция $y = g(x)$ убывает и если уравнение $f(x) = g(x)$ имеет корень, то только один. Преобразуем уравнение к виду $x^5 = 42 - 5x$. Поскольку функция $y = x^5$ возрастает, а функция $y = 42 - 5x$ убывает, то уравнение $x^5 = 42 - 5x$ имеет только один корень (рис. 1; масштабы на осях координат различные), и этот корень нетрудно подобрать: $x = 2$. ■

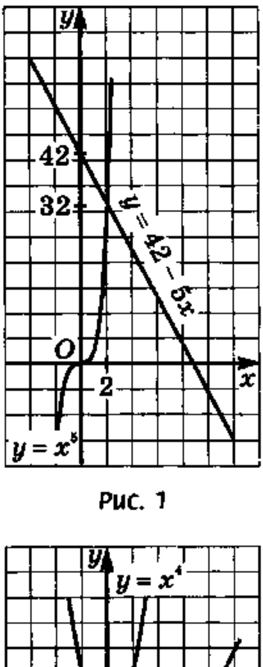


Рис. 1

Пример 8. Решить уравнение

$$x^4 - 8x + 63 = 0.$$

Решение. Первый способ. Найдём наименьшее значение функции $y = x^4 - 8x + 63$. Для этого найдём её производную: $y' = 4x^3 - 8$. Приравняв производную нулю, находим единственную стационарную точку $x = \sqrt[3]{2}$, причём это точка минимума функции. Значит (см. § 46 учебника «Алгебра и начала математического анализа–10»), в этой точке функция достигает своего наименьшего значения, найдём его: $y_{наим} = \left(\sqrt[3]{2}\right)^4 - 8\sqrt[3]{2} + 63$. Полученное число явно положительно, значит, для всех x выполняется неравенство $x^4 - 8x + 63 > 0$, а потому заданное уравнение действительных корней не имеет.

Второй способ. Преобразуем уравнение к виду $x^4 = 8x - 63$ и построим графики функций $y = x^4$, $y = 8x - 63$ (рис. 2). Они не пересекаются, значит, уравнение корней не имеет.

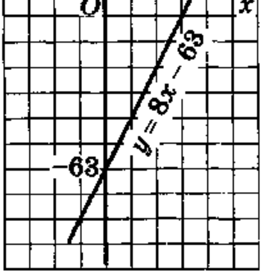


Рис. 2

Третий способ. Воспользуемся методом разложения на множители:

$$x^4 - 8x + 63 = (x^4 + 16x^2 + 64) -$$
$$- (16x^2 + 8x + 1) =$$

$$= (x^2 + 8)^2 - (4x + 1)^2 =$$
$$= ((x^2 + 8) + (4x + 1))((x^2 + 8) - (4x + 1)) =$$
$$= (x^2 + 4x + 9)(x^2 - 4x + 7).$$

Значит, заданное уравнение можно переписать в виде $(x^2 + 4x + 9)(x^2 - 4x + 7) = 0$. Теперь задача сводится к решению уравнений $x^2 + 4x + 9 = 0$, $x^2 - 4x + 7 = 0$. Поскольку ни одно из них не имеет корней, то и заданное уравнение не имеет корней. ■

Замечание. Первый и третий способы решения примера 8 — строгие, а второй не очень, поскольку то, что графики не пересекаются, не доказано.

Пример 9. Решить уравнение $x^6 + x^2 - 8x + 6 = 0$.

Решение. Преобразуем уравнение к виду $x^6 = -x^2 + 8x - 6$ и построим графики функций $y = x^6$, $y = -x^2 + 8x - 6$ (рис. 3). Замечаем, что эти графики имеют общую точку (1; 1). Но единственная ли она?

Составим уравнение касательной к графику функции $y = x^6$. Положим $f(x) = x^6$. Тогда $f'(x) = 6x^5$, $f'(1) = 6$. Уравнение касательной имеет вид $y = f(1) + f'(1)(x - 1)$, т. е. $y = 1 + 6(x - 1)$ или $y = 6x - 5$.

Составим уравнение касательной к графику функции $y = -x^2 + 8x - 6$. Положим $g(x) = -x^2 + 8x - 6$. Тогда $g'(x) = -2x + 8$, $g'(1) = 6$. Уравнение касательной имеет вид $y = g(1) + g'(1)(x - 1)$, т. е. $y = 1 + 6(x - 1)$ или $y = 6x - 5$.

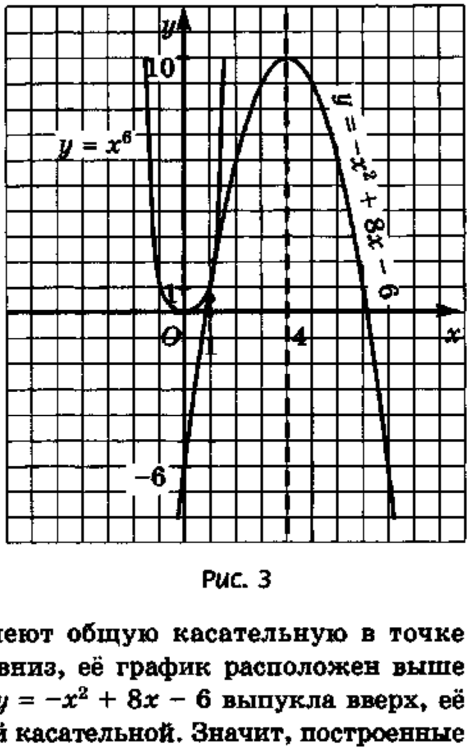


Рис. 3

Итак, построенные графики имеют общую касательную в точке (1; 1). Но функция $y = x^6$ выпукла вниз, её график расположен выше проведённой касательной. Функция $y = -x^2 + 8x - 6$ выпукла вверх, её график расположен ниже проведённой касательной. Значит, построенные графики не могут иметь более одной общей точки.

Ответ: 1.

Вопросы для самопроверки

1. Может ли уравнение $x^3 + 5x^2 - 7x - 12 = 0$ иметь рациональный корень, не являющийся целым числом? иррациональный корень?

2. Как преобразовать уравнение $ax^3 + bx^2 + cx + 1 = 0$, где a, b, c — целые числа, в приведённое уравнение с целыми коэффициентами? В чём смысл этого преобразования?

3. Приведите пример возвратного уравнения и опишите алгоритм его решения.

Исторические сведения

Хорошо знакомые нам выражения и уравнения типа $x^3 + 2xy - 3y^2$, $x^5 - 11x = 11$ и т. п., связанные с многочленами, появились в математике сравнительно недавно. Например, ещё при написании своей знаменитой «Геометрии» (1637) французский учёный и мыслитель Рене Декарт (1596—1650) обходился без знака равенства «=» (самый знаменитый афоризм Декарта: «Я мыслю, следовательно, я существую»). Несколько ранее, в 1593 г., французский математик Франсуа Виет (1540—1603) вместо понятного для нас уравнения $x^3 - 3a^2x = a^3$ использовал такую запись: «*A cubo minus Z quadrato ter in A aequatur Z cubo*», а в 1545 г. итальянский математик, врач и философ Джеронимо Кардано (1501—1576) так рассказывал о своей формуле корня кубического уравнения: «*Куб третьей части "вещей", к которому ты прибавляешь квадрат половины числа из уравнения и берёшь корень из всего полученного, — это квадратный корень, который ты используешь в одном случае, прибавляя половину числа, которое как раз умножал само на себя*».

В то же время с содержательной точки зрения к многочленам и уравнениям невысоких степеней учёные приходили с самых древних времён. Так, уже в древневавилонских текстах времён династии Хаммурапи (1800 г. до н. э.) встречаются решения многочисленных уравнений и систем (с числовыми коэффициентами) первой и второй степени. Архимед (III в. до н. э.) в работе «О шаре и цилиндре» сводит геометрическую задачу о сечениях к кубическому уравнению. Позже Диокл (240—180 г. до н. э.) изучал ту же задачу и, кроме того, с помощью кривой третьего порядка («Циссоида Диоклеса») решал знаменитую *проблему удвоения куба*. На арабском Востоке и в Индии квадратные и кубические уравнения исследовались в работах Ариабхаты (476—550), Бхаскары I (600—680), Брахмагупты (598—660), аль-Хорезми (783—850), Омара Хайама (1048—1131).

Начало буквенного исчисления, или буквенной алгебры, традиционно связывают с «Арифметикой» (середина III в. н. э.) Диофанта Александрийского. В ней он отказывается от традиционного для греческой математики геометрического истолкования алгебраических операций, вводит специальные названия для небольших степеней («квадрато-квадрат» — для четвёртой, «квадрато-куб» — для шестой, «первая неделимая» — для пятой), формулирует основные правила действий со степенями, но в основном развивает технику решений в целых числах уравнений типа $ax + by + cz = d$ с целыми коэффициентами.

В 1591 г. Виет в трактате «Введение в аналитическое искусство» ввёл знаки произвольного числа переменных и параметров, что дало возможность для развития алгоритмов алгебраических операций и для замены словесных рассуждений аналитическими. Сам термин «аналитический» заимствован Виетом из древнегреческой терминологии. В 1637 г. Декарт развил идеи Виета и разработал основы аналитической геометрии, в которой геометрические задачи сводились к алгебраическим. После работ Декарта мы все используем для обозначения переменных или неизвестных последние буквы латинского алфавита x, y, z. Кроме того, стало принятым сводить уравнения к виду с нулевой правой частью. Английский физик и математик сэр Исаак Ньютон (1643—1727) во «Всеобщей арифметике» (1707) первым систематически изложил зависимости между коэффициентами алгебраического уравнения и симметрическими функциями его корней (в частности, и теорему со с. 23).

Деление многочлена на многочлен («уголком», «столбиком» или ещё каким-либо способом), очевидно, заимствовано из аналогичного алгоритма деления натуральных чисел, который, в свою очередь, напрямую связан с алгоритмом Евклида нахождения НОД. Теорема 3 (с. 9) сформулирована примерно в 1765 г. французским математиком Этьеном Безу (1730—1783). Она дала удобный способ нахождения рациональных корней многочленов с целыми коэффициентами. Схема на с. 10—11 итальянца Паоло Руффини (1765—1822) и англичанина Уильяма Горнера (1786—1837) опубликована соответственно в 1804 и в 1819 гг.

ГЛАВА 2 Степени и корни. Степенные функции

§ 4. Понятие корня n-й степени из действительного числа

Рассмотрим уравнение $x^4 = 1$ и решим его графически. Для этого в одной системе координат построим график функции $y = x^4$ и прямую $y = 1$ (рис. 4, *а*). Они пересекаются в точках $A(-1; 1)$ и $B(1; 1)$. Абсциссы точек A и B, т. е. $x_1 = -1$, $x_2 = 1$, являются корнями уравнения $x^4 = 1$.

Рассуждая точно так же, находим корни уравнения $x^4 = 16$: $x_1 = -2$, $x_2 = 2$.

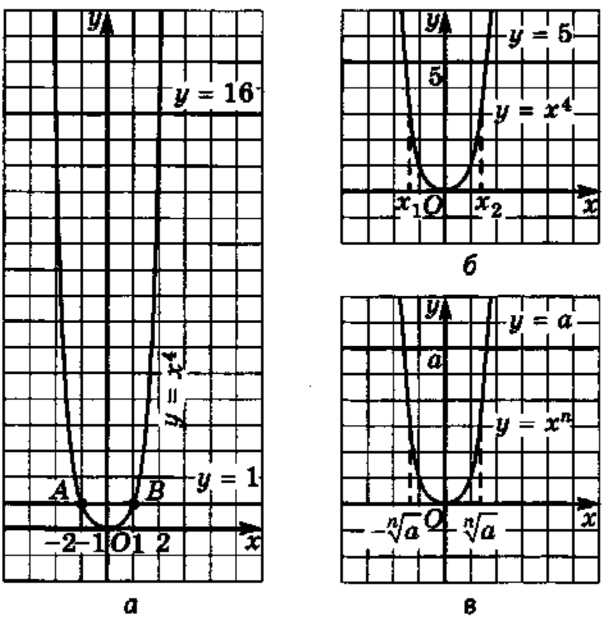


Рис. 4

А теперь попробуем решить уравнение $x^4 = 5$; геометрическая иллюстрация представлена на рис. 4, *б*. Ясно, что уравнение имеет два корня — x_1 и x_2, причём это противоположные числа, как и в двух предыдущих случаях. Но для первых двух уравнений корни были найдены без труда (их можно было найти и не пользуясь графиками), а с уравнением $x^4 = 5$ имеются проблемы: по чертежу мы не можем указать значения корней, а можем только установить, что один корень располагается левее точки -1, а второй — правее точки 1.

Встретившись впервые с подобной ситуацией, математики поняли, что надо придумать способ её описания на математическом языке. Они ввели в рассмотрение новый символ $\sqrt[4]{}$ и с помощью этого символа корни уравнения $x^4 = 5$ записали так: $x_1 = -\sqrt[4]{5}$, $x_2 = \sqrt[4]{5}$ (читают: *корень четвёртой степени из пяти*).

Новые термины и новые обозначения в математике появляются, когда они необходимы для описания новой математической модели. Это отражение особенности математического языка: его основная функция не коммуникативная — для общения, а организующая — для организации успешной работы с математическими моделями в разных областях знаний.

Мы говорили об уравнении $x^4 = a$, где $a > 0$. С равным успехом мы могли говорить и об уравнении $x^n = a$, где $a > 0$, а n — любое натуральное число. Например, решая графически уравнение $x^5 = 1$, находим $x = 1$ (рис. 5); решая уравнение $x^5 = 7$, устанавливаем, что уравнение имеет один корень x_1, который располагается на оси x чуть правее точки 1 (см. рис. 5). Для числа x_1 введено обозначение $\sqrt[5]{7}$.

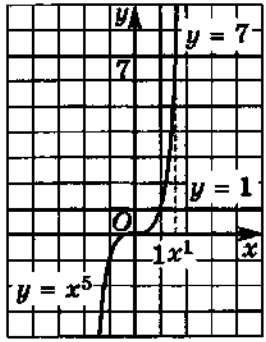


Рис. 5

Вообще, решая уравнение $x^n = a$, где $a > 0$, $n \in N$, $n > 1$, получаем в случае чётного n два корня: $-\sqrt[n]{a}$, $\sqrt[n]{a}$ (рис. 4, *в*); в случае нечётного n — один корень $\sqrt[n]{a}$ (читают: *корень n-й степени из числа a*). Решая уравнение $x^n = 0$, получаем единственный корень $x = 0$.

З а м е ч а н и е. В математическом языке, как и в обыденном языке, бывает так, что один и тот же термин применяется к разным понятиям. Так, в предыдущем абзаце слово «корень» употреблено в двух смыслах: как корень уравнения и как корень n-й степени из числа. Обычно из контекста бывает ясно, какое толкование термина имеется в виду.

Теперь мы готовы дать точное определение.

Определение 1. **Корнем n-й степени из неотрицательного числа a** ($n = 2, 3, 4, 5, \ldots$) называют такое неотрицательное число, при возведении в степень n которого получается число a. Это число обозначают $\sqrt[n]{a}$, число a при этом называют **подкоренным числом**, а число n — **показателем корня.**

Если $n = 2$, то обычно не говорят «корень второй степени», а говорят «корень квадратный». В этом случае не пишут $\sqrt[2]{a}$, а пишут $\sqrt{a}$. Если $n = 3$, то вместо «корень третьей степени» часто говорят «корень кубический». Это те частные случаи, которые вы специально изучали в курсе алгебры 8—9-го классов.

Итак,

если $a \geqslant 0$, $n = 2, 3, 4, 5, \ldots$, то: 1) $\sqrt[n]{a} \geqslant 0$; 2) $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$.

Вообще $\sqrt[n]{a} = b$ и $b^n = a$ — одна и та же зависимость между неотрицательными числами a и b, но только вторая описана более нростым языком (использует более простые символы), чем первая.

Операцию нахождения корня из неотрицательного числа называют *извлечением корня.* Эта операция является обратной по отношению к возведению в соответствующую степень. Сравните

Возведение в степень	Извлечение корня
$5^2 = 25$	$\sqrt{25} = 5$
$10^3 = 1000$	$\sqrt[3]{1000} = 10$
$0{,}3^4 = 0{,}0081$	$\sqrt[4]{0{,}0081} = 0{,}3$

Ещё раз обратите внимание: в таблице фигурируют только положительные числа, поскольку это оговорено в определении 1. И хотя, например, $(-6)^2 = 36$ — верное равенство, перейти от него к записи с использованием квадратного корня, т. е. написать, что $\sqrt{36} = -6$, нельзя. По определению $\sqrt{36}$ — положительное число, значит, $\sqrt{36} = 6$ (а не -6). Точно так же, хотя и $2^4 = 16$, и $(-2)^4 = 16$, переходя к знакам корней, мы должны написать $\sqrt[4]{16} = 2$ (и в то же время $\sqrt[4]{16} \neq -2$).

Иногда выражение $\sqrt[n]{a}$ называют *радикалом* (от латинского слова *radix* — «корень»). В русском языке термин *радикальный* используется довольно часто, например, «радикальные изменения» — это значит «коренные изменения». Между прочим, и само обозначение корня напоминает о слове *radix*: символ $\sqrt{\ }$ — это стилизованная буква *r*.

Пример 1. Вычислить:

а) $\sqrt{49}$; б) $\sqrt[3]{0,125}$; в) $\sqrt[7]{0}$; г) $\sqrt[4]{17}$.

Решение. а) $\sqrt{49} = 7$, так как $7 > 0$ и $7^2 = 49$.

б) $\sqrt[3]{0,125} = 0,5$, так как $0,5 > 0$ и $0,5^3 = 0,125$.

в) $\sqrt[7]{0} = 0$.

г) В отличие от предыдущих примеров мы не можем указать точное значение числа $\sqrt[4]{17}$. Ясно лишь, что оно больше чем 2, но меньше чем 3, поскольку $2^4 = 16$ (это меньше чем 17), а $3^4 = 81$ (это больше чем 17). Приближённое значение числа $\sqrt[4]{17}$ можно найти с помощью калькулятора, который содержит операцию извлечения корня, оно приближённо равно 2,03, т. е. $\sqrt[4]{17} \approx 2,03$ (с точностью до 0,01). ■

Пусть a — натуральное число. Если $\sqrt[n]{a}$ не извлекается, т. е. не существует натурального числа b такого, что $b^n = a$, то $\sqrt[n]{a}$ — иррациональное число. Докажем это, например, для числа $\sqrt[4]{17}$, о котором шла речь в примере 1.

Число $\sqrt[4]{17}$ — корень уравнения $x^4 = 17$. Уравнение $x^4 - 17 = 0$ — приведённое уравнение с целыми коэффициентами. Его целочисленными корнями, как мы видели в главе 1, могут быть только делители числа 17, т. е. числа ± 1, ± 17. Ни одно из этих четырёх чисел уравнению не удовлетворяет. В то же время, как мы отмечали в той же главе 1, если у приведённого уравнения нет целочисленных корней, то нет и рациональных корней. Вывод: число $\sqrt[4]{17}$, служащее корнем уравнения, не может быть рациональным числом, это иррациональное число.

Операцию извлечения корня определяют и для отрицательного подкоренного числа, но только в случае **нечётного** показателя корня. Иными словами, равенство $(-2)^5 = -32$ можно переписать в эквивалентной форме как $\sqrt[5]{-32} = -2$. При этом используется следующее определение.

Определение 2. **Корнем нечётной степени n из отрицательного числа a** ($n = 3, 5, \ldots$) называют такое отрицательное число, при возведении которого в степень n получается число a.

Это число, как и в определении 1, обозначают $\sqrt[n]{a}$, число a — *подкоренное число*, число n — *показатель корня.*

Итак,

если $a < 0$, $n = 3, 5, 7, \ldots$, то: 1) $\sqrt[n]{a} < 0$; 2) $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$.

Подчеркнём ещё раз: корень чётной степени имеет смысл (т. е. определён) только для неотрицательного подкоренного числа; корень нечётной степени имеет смысл для любого подкоренного числа.

Пример 2. Решить уравнения:

а) $\sqrt[3]{3x+4} = -2$; в) $\sqrt[4]{2-5x} = -4$;

б) $\sqrt[4]{3x-2} = 1$; г) $\sqrt[6]{x^2-5x+68} = 2$.

Решение. а) Если $\sqrt[3]{y} = -2$, то $y = -8$. Фактически обе части заданного уравнения мы должны возвести в куб. Получим:

$$3x + 4 = -8;$$
$$x = -4.$$

б) Рассуждая так же, как в пункте а), возведём обе части уравнения в четвёртую степень. Получим:

$$3x - 2 = 1;$$
$$x = 1.$$

в) Здесь не надо возводить в четвёртую степень, это уравнение не имеет корней. Почему? Потому что согласно определению 1 корень чётной степени — неотрицательное число.

г) Возведя обе части уравнения в шестую степень, получим:

$$x^2 - 5x + 68 = 64;$$
$$x^2 - 5x + 4 = 0;$$
$$x_1 = 1,\ x_2 = 4.$$

■

Вопросы для самопроверки

1. Сформулируйте определение корня n-й степени из неотрицательного числа.

2. Сформулируйте определение корня нечётной степени из отрицательного числа.

3. Найдите область определения выражения:

а) $\sqrt[4]{2x-6}$; б) $\sqrt[7]{2x-6}$.

§ 5. Функции $y = \sqrt[n]{x}$, их свойства и графики

В предыдущем параграфе мы ввели понятие корня n-й степени из действительного числа, отметили, что из любого неотрицательного числа можно извлечь корень любой степени (второй, третьей, четвёртой и т. д.), а из отрицательного числа можно извлечь корень нечётной степени. Но тогда следует подумать и о функции $y = \sqrt[n]{x}$, о её графике и свойствах. Этим мы и займёмся в настоящем параграфе. Сначала поговорим о функции $y = \sqrt[n]{x}$ в случае неотрицательных значений аргумента.

Рассмотрим функцию $y = x^n$, $x \in [0; +\infty)$, где $n \in N$, $n \geqslant 2$. Её график изображён на рис. 6. Эта функция монотонна и непрерывна на луче $[0; +\infty)$, область её значений — луч $[0; +\infty)$. Значит, по теореме об обратной функции (см. «Алгебра и начала математического анализа–10», § 10) для функции $y = x^n$, $x \in [0; +\infty)$ существует монотонная и непрерывная на $[0; +\infty)$ обратная функция. Этой обратной функцией является $x = \sqrt[n]{y}$ или, поменяв, как обычно, x и y местами, $y = \sqrt[n]{x}$.

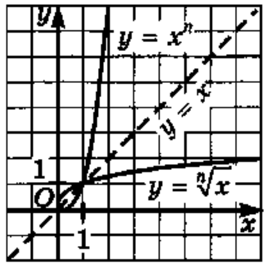


Рис. 6

Итак, $y = \sqrt[n]{x}$ — функция, обратная по отношению к степенной функции $y = x^n$, $x \in [0; +\infty)$, а потому её график получается из графика степенной функции с помощью преобразования симметрии относительно прямой $y = x$ (см. рис. 6).

Свойства функции $y = \sqrt[n]{x}$, $x \geqslant 0$:

1) $D(f) = [0; +\infty)$;
2) функция не является ни чётной, ни нечётной;
3) возрастает на $[0; +\infty)$;
4) не ограничена сверху, ограничена снизу;
5) не имеет наибольшего значения, а $y_{наим} = 0$;
6) непрерывна;
7) $E(f) = [0; +\infty)$;
8) функция $y = \sqrt[n]{x}$ выпукла вверх на луче $[0; +\infty)$.

В курсе алгебры и начал математического анализа 10-го класса мы познакомились ещё с одним свойством функции — дифференцируемостью, увидели, что функция $y = x^n$ дифференцируема в любой точке, её производная равна nx^{n-1}. Геометрически это означает, что в любой точке графика функции $y = x^n$ к нему можно провести касательную. Этим же свойством обладает и график функции $y = \sqrt[n]{x}$: в любой его точке можно провести касательную. Таким образом, мы можем отметить ещё одно свойство функции $y = \sqrt[n]{x}$:

9) функция $y = \sqrt[n]{x}$ дифференцируема в любой точке $x > 0$.

Обратите внимание: о дифференцируемости функции в точке $x = 0$ речь не идёт — в этой точке касательная к графику функции совпадает с осью y, т. е. перпендикулярна оси абсцисс.

Пример 1. Построить график функции $y = \sqrt[4]{x+1} - 4$.

Решение. 1) Перейдём к вспомогательной системе координат с началом в точке $(-1; -4)$ — пунктирные прямые $x = -1$ и $y = -4$ проведены на рис. 7.

2) «Привяжем» функцию $y = \sqrt[4]{x}$ к новой системе координат. Это и будет требуемый график (рис. 7). ■

Пример 2. Решить уравнение

$$\sqrt[6]{x} = 2 - x.$$

Решение. Первый способ.

1) Введём в рассмотрение две функции: $y = \sqrt[6]{x}$ и $y = 2 - x$.

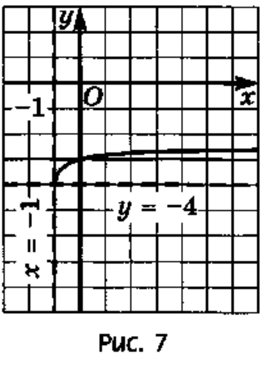


Рис. 7

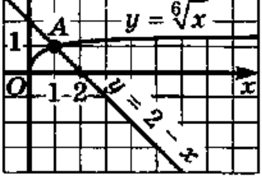


Рис. 8

2) Построим график функции $y = \sqrt[6]{x}$ (рис. 8).

3) Построим график линейной функции $y = 2 - x$ (рис. 8).

4) Построенные графики пересекаются в одной точке A, причём по графику можно сделать предположение, что координаты точки A таковы: $(1; 1)$. Проверка показывает, что на самом деле точка $(1; 1)$ принадлежит и графику функции $y = \sqrt[6]{x}$, и графику функции $y = 2 - x$. Значит, наше уравнение имеет один корень $x = 1$ — это абсцисса точки A.

Второй способ. В курсе алгебры и начал математического анализа 10-го класса мы уже пользовались тем фактом, что если функция $y = f(x)$ возрастает, а функция $y = g(x)$ убывает и если уравнение $f(x) = g(x)$ имеет корень, то только один.

Вот как, опираясь на это утверждение, мы можем решить заданное уравнение:

1) заметим, что при $x = 1$ выполняется равенство $\sqrt[6]{1} = 2 - 1$, значит, $x = 1$ — корень уравнения (этот корень мы угадали);

2) функция $y = 2 - x$ убывает, а функция $y = \sqrt[6]{x}$ возрастает; значит, корень у заданного уравнения только один и этим корнем является найденное выше значение $x = 1$.

Ответ: $x = 1$.

До сих пор мы говорили о функции $y = \sqrt[n]{x}$ только для неотрицательных значений аргумента. Но ведь если n — нечётное число, выражение $\sqrt[n]{x}$ имеет смысл и для $x < 0$. Значит, следует поговорить о функции $y = \sqrt[n]{x}$ в случае нечётного n для любых значений x.

Собственно говоря, к перечисленным добавится только одно свойство: *если n — нечётное число* ($n = 3, 5, 7, \ldots$), *то $y = \sqrt[n]{x}$ — нечётная функция.*

В самом деле, пусть $f(x) = \sqrt[n]{x}$. Тогда

$$f(-x) = \sqrt[n]{-x} = -\sqrt[n]{x} = -f(x)$$

(для нечётного показателя n такие преобразования верны). Итак, $f(-x) = -f(x)$, а это и означает нечётность функции.

Как же выглядит график функции $y = \sqrt[n]{x}$ в случае нечётного показателя n? При $x \geqslant 0$, как показано на рис. 6, это ветвь искомого графика. Добавив к ней ветвь, симметричную ей относительно начала координат (что, напомним, характерно для любой нечётной функции), получим график функции $y = \sqrt[n]{x}$ (рис. 9). Обратите внимание: ось y является касательной к графику в точке $x = 0$.

Итак, повторим ещё раз:

если n — чётное число, то график функции $y = \sqrt[n]{x}$ имеет вид, представленный на рис. 6;

если n — нечётное число, то график функции $y = \sqrt[n]{x}$ имеет вид, представленный на рис. 9.

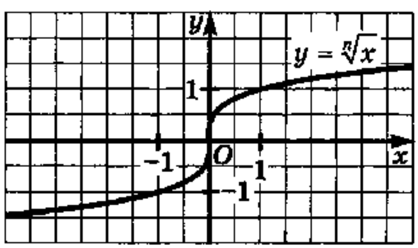


Рис. 9

Пример 3. Построить и прочитать график функции $y = f(x)$, где

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x}, \text{ если } x \leqslant 1, \\ \dfrac{1}{x^2}, \text{ если } x > 1. \end{cases}$$

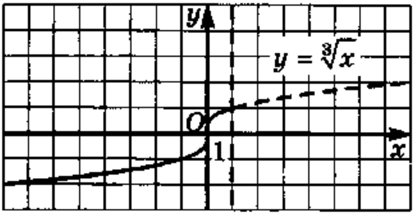


Рис. 10

Решение. Сначала построим график функции $y = \sqrt[3]{x}$ и выделим его часть на луче $(-\infty; 1]$ (рис. 10). Затем построим график функции $y = \dfrac{1}{x^2}$ и выделим его часть на открытом луче $(1; +\infty)$ (рис. 11). Наконец, оба «кусочка» изобразим в одной системе координат — это и будет график функции (рис. 12; здесь для наглядности увеличен масштаб).

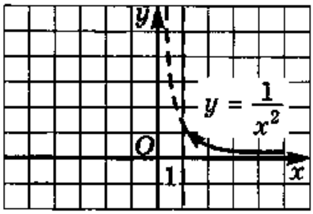


Рис. 11

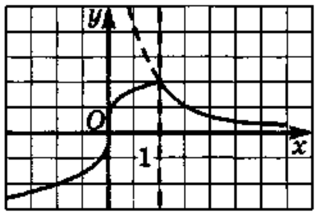


Рис. 12

Перечислим (опираясь на построенный график) свойства функции $y = f(x)$:

1) $D(f) = (-\infty; +\infty)$;

2) ни чётная, ни нечётная;

3) убывает на луче $[1; +\infty)$; возрастает на луче $(-\infty; 1]$;

4) не ограничена снизу, ограничена сверху;

5) нет наименьшего значения, а $y_{\text{наиб}} = 1$ (достигается в точке $x = 1$);

6) непрерывна;

7) $E(f) = (-\infty; 1]$;

8) функция дифференцируема всюду, кроме точек $x = 0$ и $x = 1$;

9) график функции имеет горизонтальную асимптоту $y = 0$ при $x \to +\infty$; это означает, напомним, что $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$. ■

Пример 4. Найти область определения функции:

а) $y = \sqrt[4]{4x - 8}$; в) $y = \sqrt{2x + 2} - \sqrt[6]{16 - x^2}$.

б) $y = \sqrt[3]{x^2 - 9}$;

Решение. а) Под знаком корня чётной степени должно находиться неотрицательное число, значит, задача сводится к решению неравенства $4x - 8 \geqslant 0$. Получаем $x \geqslant 2$. Значит, $D(f) = [2; +\infty)$.

б) Под знаком корня нечётной степени может находиться любое число, значит, здесь на x не накладывается никаких ограничений, т. е. $D(f) = \boldsymbol{R}$.

в) Выражение $\sqrt{2x+2}$ имеет смысл при условии $2x + 2 \geqslant 0$, а выражение $\sqrt[6]{16 - x^2}$ — при условии $16 - x^2 \geqslant 0$. Значит, должны одновременно выполняться неравенства $2x + 2 \geqslant 0$ и $16 - x^2 \geqslant 0$, т. е. задача сводится к решению системы неравенств

$$\begin{cases} 2x + 2 \geqslant 0, \\ 16 - x^2 \geqslant 0. \end{cases}$$

Решая неравенство $2x + 2 \geqslant 0$, находим $x \geqslant -1$.

Решим неравенство $16 - x^2 \geqslant 0$. Разложим левую часть неравенства на множители: $(4 - x)(4 + x) \geqslant 0$. Левая часть неравенства обращается в 0 в точках -4 и 4. Отметим эти точки на числовой прямой (рис. 13, *а*). Числовая прямая разбивается указанными точками на три промежутка, причём на каждом промежутке выражение $p(x) = (4 - x)(4 + x)$ сохраняет постоянный знак (знаки указаны на рис. 13, *а*). Промежуток, на котором выполняется неравенство $p(x) > 0$, заштрихован на рис. 13, *а*. По условию задачи нас интересуют и те точки x, в которых выполняется равенство $p(x) = 0$. Таких точек две: $x = -4$, $x = 4$ — они отмечены на рис. 13, *а* тёмными кружочками.

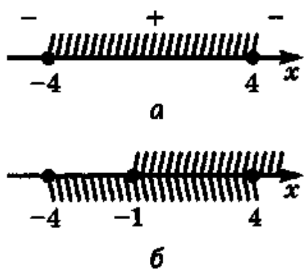


Рис. 13

Отметим найденные решения первого и второго неравенств системы на одной координатной прямой, использовав для первого верхнюю, а для второго нижнюю штриховку (рис. 13, *б*). Решением системы неравенств будет пересечение решений неравенств системы — отрезок $[-1; 4]$.

Ответ: $D(f) = [-1; 4]$.

Вопросы для самопроверки

1. Объясните, почему функция $y = \sqrt[n]{x}$, $x \in [0; +\infty)$, является обратной по отношению к функции $y = x^n$, $x \in [0; +\infty)$, где $n = 2, 3, 4, \ldots$.

2. Как связаны между собой графики функций $y = \sqrt[n]{x}$, $x \in [0; +\infty)$, и $y = x^n$, $x \in [0; +\infty)$? Проиллюстрируйте свой ответ на примере функций $y = x^2$, $x \in [0; +\infty)$, и $y = \sqrt{x}$.

3. Если n — чётное натуральное число, то что вы можете сказать о чётности или нечётности функции $y = \sqrt[n]{x}$?

4. Если n — нечётное натуральное число, отличное от 1, то что вы можете сказать о чётности или нечётности функции $y = \sqrt[n]{x}$?

§ 6. Свойства корня n-й степени

Чтобы успешно использовать на практике операцию извлечения корня, нужно познакомиться со свойствами этой операции, что мы и сделаем в настоящем параграфе.

Все свойства формулируются и доказываются только для неотрицательных значений переменных, содержащихся под знаками корней.

Теорема 1. ***Корень n-й степени ($n = 2, 3, 4, \ldots$) из произведения двух неотрицательных чисел равен произведению корней n-й степени из этих чисел:***

$$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\,\sqrt[n]{b}.$$

Доказательство. Введём следующие обозначения: $\sqrt[n]{ab} = x$, $\sqrt[n]{a} = y$, $\sqrt[n]{b} = z$. Нам надо доказать, что для неотрицательных чисел x, y, z выполняется равенство $x = yz$.

Так как $\sqrt[n]{ab} = x$, то $x^n = ab$. Так как $\sqrt[n]{a} = y$, то $y^n = a$. Так как $\sqrt[n]{b} = z$, то $z^n = b$.

Итак, $x^n = ab$, $y^n = a$, $z^n = b$, тогда $x^n = y^n z^n$, т. е. $x^n = (yz)^n$. Но если степени двух неотрицательных чисел равны и показатели степеней равны, то равны и основания степеней; значит, из равенства $x^n = (yz)^n$ следует, что $x = yz$, а это и требовалось доказать.

Замечание 1. Теорема 1 остаётся справедливой и для случая, когда подкоренное выражение представляет собой произведение более чем двух неотрицательных чисел.

Замечание 2. Теорему 1 можно сформулировать, используя конструкцию «если... то» (как это принято для теорем в математике). Приведём соответствующую формулировку: *если a и b — неотрицательные числа, то справедливо равенство* $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}$. Следующую теорему мы именно так и оформим.

Теорема 2. ***Если $a \geqslant 0$, $b > 0$ и n — натуральное число, большее 1, то справедливо равенство***

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}.$$

Краткая (хотя и неточная) формулировка, которую удобнее использовать на практике: *корень из частного равен частному корней.*

Доказательство аналогично доказательству теоремы 1, проведите его самостоятельно.

Вы, конечно, обратили внимание на то, что указанные два свойства корней n-й степени представляют собой обобщение известных вам из курса алгебры 8-го класса свойств квадратных корней. И если бы других свойств корней n-й степени не было, то всё было бы просто (и не очень интересно). На самом деле есть ещё несколько интересных и важных свойств, которые мы обсудим в этом параграфе. Но сначала рассмотрим примеры на использование теорем 1 и 2.

Пример 1. Вычислить $\sqrt[3]{125 \cdot 64 \cdot 27}$.

Решение. Воспользовавшись первым свойством корней (теорема 1), получим:

$$\sqrt[3]{125 \cdot 64 \cdot 27} = \sqrt[3]{125} \cdot \sqrt[3]{64} \cdot \sqrt[3]{27} = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60. \qquad \blacksquare$$

Замечание 3. Можно, конечно, этот пример решить по-другому, особенно если у вас под рукой есть микрокалькулятор: перемножить числа 125, 64 и 27, а затем извлечь кубический корень из полученного произведения. Но, согласитесь, данное выше решение «интеллигентнее».

Пример 2. Вычислить $\sqrt[4]{5\frac{1}{16}}$.

Решение. Обратим смешанное число $5\frac{1}{16}$ в неправильную дробь: $5\frac{1}{16} = \frac{81}{16}$. Воспользовавшись вторым свойством корней (теорема 2), получим:

$$\sqrt[4]{\frac{81}{16}} = \frac{\sqrt[4]{81}}{\sqrt[4]{16}} = \frac{3}{2} = 1{,}5. \qquad \blacksquare$$

Пример 3. Вычислить:

а) $\sqrt[3]{24} \cdot \sqrt[3]{9}$; б) $\sqrt[5]{96} : \sqrt[5]{3}$.

Решение. Первое свойство корней означает, что $\sqrt[3]{ab}$ можно представить в виде $\sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{b}$ и, наоборот, $\sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{b}$ можно заменить выражением $\sqrt[3]{ab}$. То же относится и ко второму свойству корней. Учитывая это, выполним вычисления.

а) $\sqrt[3]{24} \cdot \sqrt[3]{9} = \sqrt[3]{24 \cdot 9} = \sqrt[3]{8 \cdot 27} = \sqrt[3]{8} \cdot \sqrt[3]{27} = 2 \cdot 3 = 6.$

б) $\sqrt[5]{96} : \sqrt[5]{3} = \sqrt[5]{96 : 3} = \sqrt[5]{32} = 2.$ $\blacksquare$

Пример 4. Выполнить действия:

а) $\sqrt[4]{a} \cdot \sqrt[4]{b} \cdot \sqrt[4]{b}$; б) $\sqrt{a} \cdot \sqrt[3]{a}$.

Решение. а) $\sqrt[4]{a} \cdot \sqrt[4]{b} \cdot \sqrt[4]{b} = \sqrt[4]{a \cdot b \cdot b} = \sqrt[4]{ab^2}$.

б) Теорема 1 позволяет нам перемножать только корни одинаковой степени, т. е. только корни с одинаковым показателем. Здесь же предлагается умножить корень второй степени из числа a на корень третьей степени из того же числа. Как это делать, мы пока не знаем. Вернёмся к этой проблеме позднее. ■

Продолжим изучение свойств радикалов.

Теорема 3. ***Если $a \geqslant 0$, k — натуральное число и n — натуральное число, большее 1, то справедливо равенство***

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^k = \sqrt[n]{a^k}.$$

Иными словами, *чтобы возвести корень в натуральную степень, достаточно возвести в эту степень подкоренное выражение.*

Это следствие теоремы 1. В самом деле, $\left(\sqrt[n]{a}\right)^k = \underbrace{\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{a} \cdot \ldots \cdot \sqrt[n]{a}}_{k \text{ множителей}} =$

$= \sqrt[n]{\underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{k \text{ множителей}}} = \sqrt[n]{a^k}$.

Теорема 4. ***Если $a \geqslant 0$ и n, k — натуральные числа, большие 1, то справедливо равенство***

$$\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[nk]{a}.$$

Иными словами, *чтобы извлечь корень из корня, достаточно перемножить показатели корней.*

Например, $\sqrt[3]{\sqrt[4]{a}} = \sqrt[12]{a}$; $\sqrt[5]{\sqrt{a}} = \sqrt[10]{a}$; $\sqrt{\sqrt{a}} = \sqrt[4]{a}$.

Доказательство. Введём следующие обозначения: $\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = x$, $\sqrt[nk]{a} = y$. Тогда $x^n = \sqrt[k]{a}$, откуда следует, что $(x^n)^k = a$, т. е. $x^{nk} = a$. Далее, из $\sqrt[nk]{a} = y$ следует, что $y^{nk} = a$. Таким образом, $x^{nk} = y^{nk}$, значит, $x = y$, что и требовалось доказать.

Замечание 4. Чему вы научились благодаря доказанным теоремам? Вы узнали, что над корнями можно осуществлять четыре операции: умножение, деление, возведение в степень и извлечение корня (из корня). А как обстоит дело со сложением и вычитанием корней? Никак. Об этом мы говорили ещё в 8-м классе по поводу операции извлечения квадратного корня. Например, вместо $\sqrt[3]{8 + 27}$ нельзя написать $\sqrt[3]{8} + \sqrt[3]{27}$. В самом деле, $\sqrt[3]{8 + 27} = \sqrt[3]{35}$, а $\sqrt[3]{8} + \sqrt[3]{27} = 2 + 3 = 5$. Но ведь очевидно, что $\sqrt[3]{35} \neq 5$. Будьте внимательны!

Самое, пожалуй, интересное свойство корней — это то, о котором пойдёт речь в следующей теореме. Учитывая особую значимость этого свойства, мы позволим себе нарушить определённый стиль формулировок и доказательств, выработанный в этом параграфе, с тем чтобы формулировка теоремы 5 была немного «мягче», а её доказательство — понятнее.

Теорема 5. ***Если $a \geqslant 0$ и если показатели корня и подкоренного выражения умножить или разделить на одно и то же натуральное число, то значение корня не изменится, т. е.***

$$\sqrt[np]{a^{kp}} = \sqrt[n]{a^k}.$$

Например:

$\sqrt[12]{a^8} = \sqrt[3]{a^2}$ (показатели корня и подкоренного выражения разделили на 4);

$\sqrt[6]{a^3} = \sqrt{a}$ (показатели корня и подкоренного выражения разделили на 3);

$\sqrt[5]{a^2} = \sqrt[10]{a^4}$ (показатели корня и подкоренного выражения умножили на 2).

Доказательство. Обозначим левую часть доказываемого равенства буквой x: $\sqrt[np]{a^{kp}} = x$. Тогда по определению корня должно выполняться равенство

$$x^{np} = a^{kp}.$$

Обозначим правую часть доказываемого равенства буквой y: $\sqrt[n]{a^k} = y$. Тогда по определению корня должно выполняться равенство $y^n = a^k$.

Возведём обе части последнего равенства в одну и ту же степень p, получим: $y^{np} = a^{kp}$.

Итак, $x^{np} = a^{kp}$, $y^{np} = a^{kp}$.

Сопоставляя эти два равенства, приходим к выводу, что $x^{np} = y^{np}$, а значит, $x = y$, что и требовалось доказать.

Доказанная теорема позволит нам решить ту проблему, с которой мы столкнулись выше при решении примера 4б, где требовалось выполнить умножение корней с разными показателями:

$$\sqrt{a} \cdot \sqrt[3]{a}.$$

Вот как обычно рассуждают в подобных случаях.

1) По теореме 5 в выражении $\sqrt{a}$ можно и показатель корня (т. е. число 2), и показатель подкоренного выражения (т. е. число 1) умножить на одно и то же натуральное число. Воспользовавшись этим, умножим оба показателя на 3:

$$\sqrt{a} = \sqrt[6]{a^3}.$$

2) По теореме 5 в выражении $\sqrt[3]{a}$ можно и показатель корня (т. е. число 3), и показатель подкоренного выражения (т. е. число 1) умножить на одно и то же натуральное число. Воспользовавшись этим, умножим оба показателя на 2:

$$\sqrt[3]{a} = \sqrt[6]{a^2}.$$

3) Поскольку получили корни одной и той же шестой степени, их можно перемножить:

$$\sqrt{a} \cdot \sqrt[3]{a} = \sqrt[6]{a^3} \cdot \sqrt[6]{a^2} = \sqrt[6]{a^3 \cdot a^2} = \sqrt[6]{a^5}.$$

Мы рассмотрели пять свойств радикалов, которые безоговорочно верны для неотрицательных подкоренных выражений. Но при решении примеров на действия с радикалами нужно иметь в виду возможность появления отрицательных значений этих выражений. Очевидно, что все перечисленные свойства распространяются на случай корней нечётных степеней.

Несколько сложнее обстоит дело в случае корней чётных степеней. Пусть a и b — отрицательные числа, а n — чётное число. В этом случае нельзя писать $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$, так как правая часть такого «равенства» не имеет смысла (например, нельзя писать $\sqrt{(-5)(-6)} = \sqrt{-5} \cdot \sqrt{-6}$). Здесь можно рассуждать так: a и b — отрицательные числа, следовательно, $ab > 0$. Но тогда $ab = |ab| = |a| \cdot |b|$. Значит, $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{|ab|} = \sqrt[n]{|a| \cdot |b|}$. Так как $|a| > 0$ и $b > 0$, то по теореме 1

$$\sqrt[n]{|a| \cdot |b|} = \sqrt[n]{|a|} \cdot \sqrt[n]{|b|}.$$

Итак, если n — чётное число, а числа a и b имеют одинаковые знаки, то $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{|a|} \cdot \sqrt[n]{|b|}$ и аналогично $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{|a|}}{\sqrt[n]{|b|}}$.

Очень внимательно следует относиться к свойству 5, о котором шла речь в теореме 5. Нельзя применять её бездумно. Пусть, например, нужно упростить выражение $\sqrt[4]{(\sqrt{3} - 2)^2}$. Если формально разделить показатели корня и подкоренного выражения на 2, получится выражение, не имеющее смысла: $\sqrt{\sqrt{3} - 2}$ (квадратный корень из отрицательного числа). Правильнее в подобных случаях рассуждать так:

$$\sqrt[4]{(\sqrt{3} - 2)^2} = \sqrt[4]{|\sqrt{3} - 2|^2} = \sqrt{|\sqrt{3} - 2|} = \sqrt{2 - \sqrt{3}}.$$

Ещё один пример: нужно умножить $\sqrt[3]{\sqrt{3} - 2}$ на $\sqrt[6]{\sqrt{3} + 2}$. Формальное применение теоремы 5 приведёт к неправильному результату $\sqrt[3]{\sqrt{3}-2}\cdot\sqrt[6]{\sqrt{3}+2}=\sqrt[6]{(\sqrt{3}-2)^2(\sqrt{3}+2)}$, поскольку в результате перемножения отрицательного и положительного числа получилось положительное число. Правильнее в подобных случаях рассуждать так:

$$\sqrt[3]{\sqrt{3}-2}\cdot\sqrt[6]{\sqrt{3}+2}=-\sqrt[3]{2-\sqrt{3}}\cdot\sqrt[6]{\sqrt{3}+2}=$$
$$=-\sqrt[6]{(2-\sqrt{3})^2(\sqrt{3}+2)}=-\sqrt[6]{2-\sqrt{3}}.$$

Обратите внимание: все опасности, связанные с применением свойства 5, относятся к случаю умножения или деления показателей корня и подкоренного выражения на одно и то же **чётное** число (с нечётными множителями никаких неприятностей не происходит).

Вопросы для самопроверки

1. Какие из указанных ниже соотношений являются верными, а какие — нет (a, b, c — неотрицательные числа):

а) $\sqrt[n]{ab}=\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}$;

б) $\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}\cdot\sqrt[n]{c}=\sqrt[n]{abc}$;

в) $\sqrt[n]{a+b}=\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}$;

г) $\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}-\sqrt[n]{c}=\sqrt[n]{a+b-c}$;

д) $\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}=\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$ $(b\neq 0)$;

е) $\dfrac{\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{c}}{\sqrt[n]{b}}=\sqrt[n]{\dfrac{ac}{b}}$ $(b\neq 0)$;

ж) $\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}-\sqrt[n]{c}=\sqrt[n]{ab-c}$?

2. Какие из указанных ниже соотношений являются верными, а какие — нет ($a\geqslant 0$):

а) $\sqrt[3]{\sqrt[5]{a}}=\sqrt[15]{a}$;

б) $\sqrt[3]{\sqrt[5]{a}}=\sqrt[8]{a}$;

в) $\sqrt[5]{\sqrt{a}}=\sqrt[6]{a}$;

г) $\sqrt[5]{\sqrt{a}}=\sqrt[7]{a}$;

д) $\sqrt[5]{\sqrt{a}}=\sqrt[10]{a}$?

3. Какие из указанных ниже соотношений являются верными, а какие — нет:

а) $\sqrt[3]{a}\cdot\sqrt[4]{a}=\sqrt[7]{a}$; б) $\sqrt[3]{a}\cdot\sqrt[4]{a}=\sqrt[12]{a}$; в) $\sqrt[3]{a}\cdot\sqrt[4]{a}=\sqrt[12]{a^7}$?

4. Всегда ли верно равенство $\sqrt[4]{a^4}=a$? Если не всегда, то приведите пример, когда оно верно, и пример, когда оно неверно.

5. Всегда ли верно равенство $\sqrt[5]{a^5} = a$? Если не всегда, то приведите пример, когда оно верно, и пример, когда оно неверно.

6. Какое из приведённых ниже соотношений является тождеством:

а) $\sqrt{a^2 - 2ab + b^2} = a - b$; в) $\sqrt{a^2 - 2ab + b^2} = |a - b|$?

б) $\sqrt{a^2 - 2ab + b^2} = b - a$;

7. Дано соотношение $\sqrt[6]{ab} = \sqrt[6]{a} \cdot \sqrt[6]{b}$. Приведите пример, когда оно является верным равенством, и пример, когда не является. Как должна выглядеть правая часть соотношения при $ab > 0$, чтобы оно было верным равенством?

8. Дано соотношение $\sqrt[6]{a^2} = \sqrt[3]{a}$. Приведите пример, когда оно является верным равенством, и пример, когда не является. Как должна выглядеть правая часть соотношения, чтобы оно было верным равенством?

§ 7. Преобразование иррациональных выражений

В предыдущих параграфах вы познакомились с операцией извлечения корня n-й степени из действительного числа, изучили свойства этой операции, а именно (для неотрицательных значений a и b):

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a;\ \left(\sqrt[n]{a^n}\right) = a; \tag{1}$$

$$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}; \tag{2}$$

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}\ (b \neq 0); \tag{3}$$

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^k = \sqrt[n]{a^k}; \tag{4}$$

$$\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[nk]{a}; \tag{5}$$

$$\sqrt[np]{a^{kp}} = \sqrt[n]{a^k}. \tag{6}$$

Используя эти формулы, можно осуществлять преобразования выражений, содержащих операцию извлечения корня (выражений с радикалами), — такие выражения называют *иррациональными*. Рассмотрим несколько примеров на преобразование иррациональных выражений.

Пример 1. Упростить выражения:

а) $\sqrt[4]{32a^5}$; б) $\left(\sqrt[3]{a^2}\right)^5$.

Р е ш е н и е. а) Представим подкоренное выражение $32a^5$ в виде $16 \cdot a^4 \cdot 2a$ и воспользуемся формулой (2):

$$\sqrt[4]{32a^5} = \sqrt[4]{16} \cdot \sqrt[4]{a^4} \cdot \sqrt[4]{2a} = 2a\sqrt[4]{2a}.$$

Полученное выражение считается более простым, чем заданное, поскольку под знаком корня содержится более простое выражение. Подобное преобразование называют *вынесением множителя за знак радикала*.

б) Воспользуемся формулой (4):

$$\left(\sqrt[3]{a^2}\right)^5 = \sqrt[3]{(a^2)^5} = \sqrt[3]{a^{10}}.$$

Представим подкоренное выражение a^{10} в виде $a^9 \cdot a$ и воспользуемся формулой (2):

$$\sqrt[3]{a^{10}} = \sqrt[3]{a^9} \cdot \sqrt[3]{a} = a^3 \cdot \sqrt[3]{a}.$$

Как видите, и здесь удалось вынести множитель за знак радикала. ■

Вспомните формулу $\sqrt{a^2} = |a|$, которую вы изучали в курсе алгебры 8-го класса. Она обобщается на случай любого чётного показателя корня:

$$\boxed{\sqrt[2n]{a^{2n}} = |a|.}$$

Эту формулу следует иметь в виду в тех случаях, когда нет уверенности в том, что переменные принимают только неотрицательные значения. Например, вынося множитель за знак корня в выражении $\sqrt[4]{x^4 y}$, следует (если о знаке числа x ничего не известно) рассуждать так:

$$\sqrt[4]{x^4 y} = \sqrt[4]{x^4} \cdot \sqrt[4]{y} = |x| \cdot \sqrt[4]{y}.$$

Наряду с вынесением множителя за знак радикала в необходимых случаях используется и преобразование, так сказать, противоположной направленности: *внесение множителя под знак радикала*. Это преобразование мы используем в следующих двух примерах.

П р и м е р 2. Сравнить числа $2\sqrt[3]{3}$ и $3\sqrt[3]{2}$.

Р е ш е н и е. Имеем: $2 = \sqrt[3]{8}$; $3 = \sqrt[3]{27}$. Значит,

$$2\sqrt[3]{3} = \sqrt[3]{8} \cdot \sqrt[3]{3} = \sqrt[3]{3 \cdot 8} = \sqrt[3]{24};$$

$$3\sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{27} \cdot \sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{27 \cdot 2} = \sqrt[3]{54}.$$

Теперь ясно, что $\sqrt[3]{24} < \sqrt[3]{54}$, т. е. $2\sqrt[3]{3} < 3\sqrt[3]{2}$. ■

Пример 3. Упростить выражение $\sqrt[4]{x^2 \cdot \sqrt[3]{x}}$.

Решение. Сначала внесём множитель x^2 под знак корня третьей степени:

$$x^2 \cdot \sqrt[3]{x} = \sqrt[3]{x^6} \cdot \sqrt[3]{x} = \sqrt[3]{x^6 \cdot x} = \sqrt[3]{x^7}.$$

Теперь заданное выражение можно записать так: $\sqrt[4]{\sqrt[3]{x^7}}$.

Воспользовавшись формулой (5), мы можем последнее выражение записать в виде $\sqrt[12]{x^7}$.

Итак, $\sqrt[4]{x^2 \cdot \sqrt[3]{x}} = \sqrt[12]{x^7}$. ■

Пример 4. Выполнить действия:

а) $(\sqrt[4]{a} + \sqrt[4]{b})(\sqrt[4]{a} - \sqrt[4]{b})$;

б) $(\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b})(\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2})$.

Решение. а) Здесь можно применить формулу сокращённого умножения «разность квадратов»:

$$(\sqrt[4]{a} + \sqrt[4]{b})(\sqrt[4]{a} - \sqrt[4]{b}) = (\sqrt[4]{a})^2 - (\sqrt[4]{b})^2 = \sqrt[4]{a^2} - \sqrt[4]{b^2}.$$

Воспользовавшись формулой (6), разделим в каждом из полученных радикалов показатели корня и подкоренного выражения на 2; это существенно упростит запись: $\sqrt{a} - \sqrt{b}$. Это возможно, поскольку по смыслу примера $a \geqslant 0$ и $b \geqslant 0$.

Итак, $(\sqrt[4]{a} + \sqrt[4]{b})(\sqrt[4]{a} - \sqrt[4]{b}) = \sqrt{a} - \sqrt{b}$.

б) Здесь можно применить формулу сокращённого умножения «разность кубов»:

$$(\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b})(\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{b^2}) = (\sqrt[3]{a})^3 - (\sqrt[3]{b})^3 = a - b. \quad ■$$

Пример 5. Выполнить действия:

а) $\sqrt[8]{x^3} \cdot \sqrt[12]{x^{11}}$; б) $\sqrt{\sqrt{5} - 2} \cdot \sqrt[4]{4\sqrt{5} + 9}$.

Решение. а) Поскольку перемножать можно корни только одной и той же степени, начнём с уравнивания показателей имеющихся радикалов. Для этого дважды воспользуемся формулой (6):

$$\sqrt[8]{x^3} = \sqrt[8 \cdot 3]{x^{3 \cdot 3}} = \sqrt[24]{x^9}; \quad \sqrt[12]{x^{11}} = \sqrt[12 \cdot 2]{x^{11 \cdot 2}} = \sqrt[24]{x^{22}}.$$

А теперь воспользуемся формулой (2):

$$\sqrt[24]{x^9} \cdot \sqrt[24]{x^{22}} = \sqrt[24]{x^9 \cdot x^{22}} = \sqrt[24]{x^{31}}.$$

Осталось вынести множитель за знак радикала:

$$\sqrt[24]{x^{31}} = \sqrt[24]{x^{24} \cdot x^7} = \sqrt[24]{x^{24}} \cdot \sqrt[24]{x^7} = |x|\sqrt[24]{x^7} = x\sqrt[24]{x^7}.$$

(мы учли, что $x \geqslant 0$, — это следует из условия примера).

б) Первый способ. Преобразуем первый множитель:

$$\sqrt{\sqrt{5} - 2} = \sqrt[4]{(\sqrt{5} - 2)^2} = \sqrt[4]{(\sqrt{5})^2 - 2 \cdot 2 \cdot \sqrt{5} + 2^2} =$$

$$= \sqrt[4]{5 - 4\sqrt{5} + 4} = \sqrt[4]{9 - 4\sqrt{5}}.$$

А теперь уже нетрудно выполнить умножение радикалов:

$$\sqrt[4]{9 - 4\sqrt{5}} \cdot \sqrt[4]{9 + 4\sqrt{5}} = \sqrt[4]{(9 - 4\sqrt{5})(9 + 4\sqrt{5})} =$$

$$= \sqrt[4]{9^2 - (4\sqrt{5})^2} = \sqrt[4]{81 - 80} = 1.$$

Второй способ. Сначала поработаем с подкоренным выражением во втором множителе:

$$9 + 4\sqrt{5} = 5 + 4\sqrt{5} + 4 = (\sqrt{5})^2 + 2 \cdot 2 \cdot \sqrt{5} + 2^2 = (\sqrt{5} + 2)^2.$$

Значит, $\sqrt[4]{9 + 4\sqrt{5}} = \sqrt[4]{(\sqrt{5} + 2)^2}$. Разделив показатели корня и подкоренного выражения на 2, получим $\sqrt{\sqrt{5} + 2}$ (формулой (6) мы здесь имеем право пользоваться, поскольку подкоренное выражение $\sqrt{5} + 2$ — положительное число). Осталось выполнить умножение квадратных корней:

$$\sqrt{\sqrt{5} - 2} \cdot \sqrt{\sqrt{5} + 2} = \sqrt{(\sqrt{5} - 2)(\sqrt{5} + 2)} =$$

$$= \sqrt{(\sqrt{5})^2 - 2^2} = \sqrt{5 - 4} = 1. \quad \blacksquare$$

Пример 6. Разложить на множители выражение

$$\sqrt[5]{x^4} - 4\sqrt[5]{x^2 y} + 4\sqrt[5]{y^2}.$$

Решение. Заданное выражение можно переписать следующим образом:

$$\left(\sqrt[5]{x^2}\right)^2 - 2\sqrt[5]{x^2} \cdot 2\sqrt[5]{y} + \left(2\sqrt[5]{y}\right)^2.$$

Теперь видно, что это полный квадрат — квадрат разности выражений $\sqrt[5]{x^2}$ и $2\sqrt[5]{y}$. Значит,

$$\sqrt[5]{x^4} - 4\sqrt[5]{x^2 y} + 4\sqrt[5]{y^2} = \left(\sqrt[5]{x^2} - 2\sqrt[5]{y}\right)^2. \quad \blacksquare$$

Пример 7. Сократить дробь $\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{\sqrt{x}-2\sqrt[4]{xy}+\sqrt{y}}$.

Решение. Первый способ. Преобразуем знаменатель дроби:

$$\sqrt{x}-2\sqrt[4]{xy}+\sqrt{y}=\sqrt[4]{x^2}-2\sqrt[4]{xy}+\sqrt[4]{y^2}=$$

$$=\left(\sqrt[4]{x}\right)^2-2\sqrt[4]{x}\sqrt[4]{y}+\left(\sqrt[4]{y}\right)^2=\left(\sqrt[4]{x}-\sqrt[4]{y}\right)^2.$$

Целесообразно представить числитель как «разность квадратов»:

$$\sqrt{x}-\sqrt{y}=\sqrt[4]{x^2}-\sqrt[4]{y^2}=\left(\sqrt[4]{x}\right)^2-\left(\sqrt[4]{y}\right)^2=\left(\sqrt[4]{x}-\sqrt[4]{y}\right)\left(\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{y}\right).$$

Далее,

$$\frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{\sqrt{x}-2\sqrt[4]{xy}+\sqrt{y}}=\frac{\left(\sqrt[4]{x}-\sqrt[4]{y}\right)\left(\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{y}\right)}{\left(\sqrt[4]{x}-\sqrt[4]{y}\right)^2}=\frac{\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{y}}{\sqrt[4]{x}-\sqrt[4]{y}}.$$

Второй способ. Введём новые переменные $\sqrt[4]{x}=a$ и $\sqrt[4]{y}=b$; учтём, что при этом $\sqrt{x}=a^2$, $\sqrt{y}=b^2$. Тогда заданная дробь примет вид $\dfrac{a^2-b^2}{a^2-2ab+b^2}$.

Что дала нам замена переменных? Она позволила заменить иррациональное выражение (с переменными x и y) рациональным выражением (с переменными a и b). А оперировать с рациональными выражениями намного проще, чем с иррациональными:

$$\frac{a^2-b^2}{a^2-2ab+b^2}=\frac{(a-b)(a+b)}{(a-b)^2}=\frac{a+b}{a-b}=\frac{\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{y}}{\sqrt[4]{x}-\sqrt[4]{y}}.$$ ■

§ 8. Понятие степени с любым рациональным показателем

Вы умеете вычислять значение степени с любым целочисленным показателем, руководствуясь при этом следующими определениями:

1) если $n=1$, то $a^1=a$;
2) если $n=0$ и $a\neq 0$, то $a^0=1$;
3) если $n=2, 3, 4, 5, \ldots$, то $a^n=a\cdot a\cdot a\cdot\ldots\cdot a$ (n множителей);
4) если $n=1, 2, 3, 4, \ldots$ и $a\neq 0$, то $a^{-n}=\dfrac{1}{a^n}$.

Но математики на этом не остановились, они научились работать не только с целочисленными показателями. В этом параграфе мы обсудим, какой смысл придаётся в математике понятию степени с дробным показателем, т. е. выясним, что означают такие символы математического языка, как $2^{\frac{3}{5}}$, $3^{-0,3}$ и т. д.

Зададимся вопросом: если вводить символ $2^{\frac{3}{5}}$, то каким математическим содержанием его наполнить? Хорошо бы, рассуждали математики, чтобы сохранялись привычные свойства степеней, например, чтобы при возведении степени в степень показатели перемножались, в частности чтобы выполнялось следующее равенство:

$$\left(2^{\frac{3}{5}}\right)^5 = 2^3 \qquad (1)$$

(поскольку $\frac{3}{5}\cdot 5 = 3$). Пусть $a = 2^{\frac{3}{5}}$. Тогда равенство (1) можно переписать в виде $a^5 = 2^3$, откуда получаем $a = \sqrt[5]{2^3}$. Значит, появились основания определить $2^{\frac{3}{5}}$ как $\sqrt[5]{2^3}$. Подобные соображения и позволили математикам принять следующее определение.

Определение 1. Если $\frac{p}{q}$ — обыкновенная дробь ($p > 0$, $q > 0$, $q \ne 1$) и $a \geqslant 0$, то под $a^{\frac{p}{q}}$ понимают $\sqrt[q]{a^p}$, т. е.

$$\boxed{a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p},\ a \geqslant 0.}$$

Например, $3^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$; $7^{\frac{5}{4}} = \sqrt[4]{7^5}$ и т. д.

Самое любопытное, что введённое определение оказалось настолько удачным, что при нём сохранились *все* привычные свойства степеней, которые были доказаны для натуральных показателей: при умножении степеней с одинаковыми основаниями показатели складываются, при делении — вычитаются и т. д. Пусть, например, нам нужно выполнить умножение $a^{\frac{1}{2}} \cdot a^{\frac{1}{3}}$. Поскольку $a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}$, $a^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{a}$, задача сводится к умножению радикалов:

$$a^{\frac{1}{2}} \cdot a^{\frac{1}{3}} = \sqrt{a} \cdot \sqrt[3]{a} = \sqrt[6]{a^3} \cdot \sqrt[6]{a^2} = \sqrt[6]{a^3 \cdot a^2} = \sqrt[6]{a^5} = a^{\frac{5}{6}}.$$

Итак, $a^{\frac{1}{2}} \cdot a^{\frac{1}{3}} = a^{\frac{5}{6}}$. Но, между прочим, $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$, т. е. $a^{\frac{1}{2}} \cdot a^{\frac{1}{3}} = a^{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}$.

Пример 1. Вычислить:

а) $64^{\frac{1}{6}}$; б) $27^{\frac{2}{3}}$; в) $0^{\frac{51}{4}}$; г) $(-8)^{\frac{1}{3}}$.

Решение. а) $64^{\frac{1}{6}} = \sqrt[6]{64} = 2$.

б) $27^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{27^2} = \left(\sqrt[3]{27}\right)^2 = 3^2 = 9$.

в) $0^{\frac{51}{4}} = \sqrt[4]{0^{51}} = \sqrt[4]{0} = 0$.

г) Это задание некорректно, поскольку нет определения степени с дробным показателем для случая *отрицательного* основания. Математики договорились возводить в дробные степени *только неотрицательные числа* (и это оговорено в определении). Так что запись вида $(-8)^{\frac{1}{3}}$ считается в математике лишённой смысла. ■

Замечание. Иногда приходится слышать возражения: неверно, что запись $(-8)^{\frac{1}{3}}$ лишена смысла, ведь можно вычислить корень третьей степени из числа -8; получится -2. Так почему бы не считать, что $(-8)^{\frac{1}{3}} = -2$? Если бы математики не запретили себе возводить в дробные степени отрицательные числа, то вот с какими неприятностями пришлось бы столкнуться:

$$-2 = (-8)^{\frac{1}{3}} = (-8)^{\frac{2}{6}} = \sqrt[6]{(-8)^2} = \sqrt[6]{64} = 2.$$

Получилось «равенство» $-2 = 2$. Выбирая определения, математики как раз и заботятся о том, чтобы всё было точно, определённо, недвусмысленно. Поэтому в определении степени с нулевым показателем a^0 появилось ограничение $a \neq 0$, а в определении степени с положительным дробным показателем $a^{\frac{p}{q}}$ появилось ограничение $a \geqslant 0$.

Разумеется, математики не ограничились понятием степени с положительным дробным показателем, они ввели и определение степени с отрицательным дробным показателем, используя известную идею:

$$a^{-\frac{p}{q}} = \frac{1}{a^{\frac{p}{q}}}.$$

Но наличие дробного показателя заставляет сделать ограничение $a \geqslant 0$, а наличие знаменателя заставляет сделать ограничение $a \neq 0$, в итоге приходится накладывать ограничение $a > 0$.

Определение 2. Если $\frac{p}{q}$ — обыкновенная дробь ($q \neq 1$) и $a > 0$, то под $a^{-\frac{p}{q}}$ понимают $\frac{1}{a^{\frac{p}{q}}}$:

$$\boxed{a^{-\frac{p}{q}} = \frac{1}{a^{\frac{p}{q}}},\ a > 0.}$$

Например, $3^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{3^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $7^{-\frac{5}{4}} = \frac{1}{7^{\frac{5}{4}}} = \frac{1}{\sqrt[4]{7^5}}$ и т. д.

Итак, теперь мы знаем, что такое степень с любым рациональным показателем. Справедливы следующие свойства (предполагаем, что $a > 0$, $b > 0$, s и t — произвольные рациональные числа):

1) $a^s \cdot a^t = a^{s+t}$;
2) $a^s : a^t = a^{s-t}$;
3) $(a^s)^t = a^{st}$;
4) $(ab)^s = a^s \cdot b^s$;
5) $\left(\frac{a}{b}\right)^s = \frac{a^s}{b^s}$.

Докажем для примера свойства 1 и 3.

Пусть $a > 0$, $s = \frac{m}{n}$, $t = \frac{p}{q}$, где $m \in Z$, $p \in Z$, $n \in N$, $q \in N$, $n \neq 1$, $q \neq 1$. Тогда:

$$a^s \cdot a^t = a^{\frac{m}{n}} \cdot a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[n]{a^m} \cdot \sqrt[q]{a^p} = \sqrt[nq]{a^{mq}} \cdot \sqrt[nq]{a^{pn}} =$$

$$= \sqrt[nq]{a^{mq} \cdot a^{pn}} = \sqrt[nq]{a^{mq+pn}} = a^{\frac{mq+pn}{nq}} = a^{\frac{m}{n}+\frac{p}{q}} = a^{s+t};$$

$$(a^s)^t = \left(a^{\frac{m}{n}}\right)^{\frac{p}{q}} = \left(\sqrt[n]{a^m}\right)^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{\left(\sqrt[n]{a^m}\right)^p} = \sqrt[nq]{a^{mp}} = a^{\frac{mp}{nq}} = a^{\frac{m}{n}\cdot\frac{p}{q}} = a^{st}.$$

Поскольку оперировать с дробями легче, чем применять свойства радикалов, на практике во многих случаях предпочитают заменять радикалы степенями с дробными показателями. Для иллюстрации этого положения вернёмся к примеру 5а из § 7: $\sqrt[8]{x^3} \cdot \sqrt[12]{x^{11}}$. Если перейти к дробным показателям, то получим:

$$\sqrt[8]{x^3} \cdot \sqrt[12]{x^{11}} = x^{\frac{3}{8}} \cdot x^{\frac{11}{12}} = x^{\frac{3}{8}+\frac{11}{12}} = x^{\frac{31}{24}} = \sqrt[24]{x^{31}}.$$

Видите, насколько быстрее и проще мы получили здесь тот же результат, что и в § 7.

Пример 2. Упростить выражение

$$\left(x^{\frac{1}{3}} + y^{\frac{1}{3}}\right)^2 - 2\sqrt[3]{xy} - \frac{1}{\left(\sqrt[3]{y}\right)^{-2}}.$$

Решение.

1) $\left(x^{\frac{1}{3}} + y^{\frac{1}{3}}\right)^2 = \left(x^{\frac{1}{3}}\right)^2 + 2x^{\frac{1}{3}}\, y^{\frac{1}{3}} + \left(y^{\frac{1}{3}}\right)^2 = x^{\frac{2}{3}} + 2x^{\frac{1}{3}}\, 2x^{\frac{1}{3}} + y^{\frac{2}{3}}.$

2) $\sqrt[3]{xy} = (xy)^{\frac{1}{3}} = x^{\frac{1}{3}} y^{\frac{1}{3}}.$

3) $\dfrac{1}{\left(\sqrt[3]{y}\right)^{-2}} = \left(\sqrt[3]{y}\right)^2 = \left(y^{\frac{1}{3}}\right)^2 = y^{\frac{2}{3}}.$

4) $\left(x^{\frac{2}{3}} + 2x^{\frac{1}{3}} y^{\frac{1}{3}} + y^{\frac{2}{3}}\right) - 2x^{\frac{1}{3}}\, y^{\frac{1}{3}} - y^{\frac{2}{3}} = x^{\frac{2}{3}}.$

Ответ: $x^{\frac{2}{3}}$.

Пример 3. Решить уравнения:

а) $\sqrt[3]{x^2} = 1$; б) $x^{\frac{2}{3}} = 1$.

Решение. а) Возведём обе части уравнения в куб:

$$x^2 = 1;$$
$$x = \pm 1.$$

б) Это практически то же самое уравнение, что и в пункте а), но с одной существенной оговоркой: поскольку переменная x возводится в дробную степень, она по определению должна принимать только неотрицательные значения. Значит, из найденных выше двух значений x в качестве корня уравнения мы имеем право взять лишь значение $x = 1$.

Ответ: а) ± 1; б) 1.

Пример 4. Решить уравнение $x^{-\frac{2}{3}} - 2x^{-\frac{1}{3}} - 8 = 0$.

Решение. Введём новую переменную $y = x^{-\frac{1}{3}}$. Тогда $x^{-\frac{2}{3}} = \left(x^{-\frac{1}{3}}\right)^2 = y^2$. Значит, получаем квадратное уравнение относительно новой переменной y:

$$y^2 - 2y - 8 = 0.$$

Решив это уравнение, получим: $y_1 = -2$, $y_2 = 4$.

Теперь задача сводится к решению двух уравнений:

$$x^{-\frac{1}{3}} = -2; \quad x^{-\frac{1}{3}} = 4.$$

Первое уравнение не имеет корней, поскольку (напомним ещё раз) область допустимых значений для переменной x в подобных случаях определяется условием $x > 0$, а тогда и $x^{-\frac{1}{3}} > 0$. Решая второе уравнение, последовательно находим:

$$\frac{1}{x^{\frac{1}{3}}} = 4; \quad x^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{4}; \quad \sqrt[3]{x} = \frac{1}{4};$$

$$x = \left(\frac{1}{4}\right)^3; \quad x = \frac{1}{64}.$$

Ответ: $\frac{1}{64}$.

Уравнения, в которых переменная содержится под знаком корня или возводится в дробную степень, называют *иррациональными*. Первое знакомство с иррациональными уравнениями состоялось у вас в курсе алгебры 8-го класса, где встречались уравнения, содержащие переменную под знаком квадратного корня. В этой главе мы рассмотрели ещё несколько примеров решения иррациональных уравнений — пример 2 из § 4, пример 2 из § 5 и примеры 3, 4 из § 8.

Основные методы решения иррациональных уравнений:

— метод возведения обеих частей уравнения в одну и ту же степень;

— метод введения новых переменных;

— функционально-графический метод.

Если используется метод возведения обеих частей уравнения в одну и ту же чётную степень, то возможно появление посторонних корней, значит, обязательна проверка всех найденных решений — об этом мы говорили и раньше, в курсе алгебры 8-го класса. Более подробно об иррациональных уравнениях речь пойдёт в главе 6.

Вопросы для самопроверки

1. Как вычислить $a^{\frac{p}{q}}$, где $\frac{p}{q}$ — обыкновенная дробь и $a \geqslant 0$?

2. Какова область допустимых значений переменной в выражении $(a-2)^{\frac{2}{3}}$?

3. Как вычислить $a^{-\frac{p}{q}}$, где $\frac{p}{q}$ — обыкновенная дробь и $a > 0$?

4. Какова область допустимых значений переменной в выражении $(a+1)^{-\frac{1}{5}}$?

5. Вычислите $8^{-\frac{2}{3}}$, описав последовательность своих действий.

§ 9. *Степенные функции, их свойства и графики*

Степенными функциями называют функции вида $y = x^r$, где r — любое рациональное число.

Целый ряд таких функций мы с вами уже изучили. Так, если r — натуральное число ($r = n$), то получаем функцию $y = x^n$; графики и свойства таких функций вам известны из курса алгебры 7—9-го классов. На рис. 14 изображён график функции $y = x^1$ (прямая), на рис. 15 — $y = x^2$ (парабола), на рис. 16 — $y = x^3$ (кубическая парабола). График степенной функции $y = x^n$ в случае чётного n ($n = 4, 6, 8, \ldots$) похож на параболу, а график степенной функции $y = x^n$ в случае нечётного n ($n = 5, 7, 9, \ldots$) — на кубическую параболу.

Если $r = -n$, то получаем функцию $y = x^{-n}$, т. е. $y = \frac{1}{x^n}$; о таких функциях мы говорили в курсе алгебры 9-го класса. В случае чётного n график имеет вид, как на рис. 17; в случае нечётного n — как на рис. 18.

Наконец, если $r = 0$, т. е. речь идёт о функции $y = x^0$, то о ней и говорить неинтересно, поскольку это функция $y = 1$, где $x \neq 0$; график изображён на рис. 19.

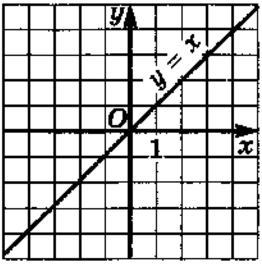


Рис. 14

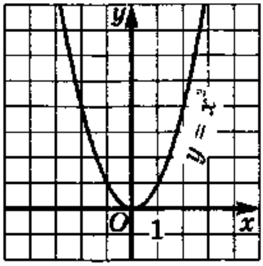


Рис. 15

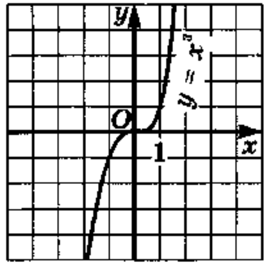


Рис. 16

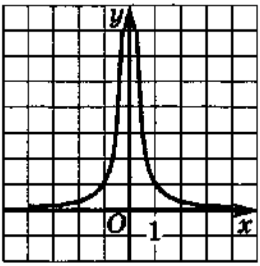


Рис. 17

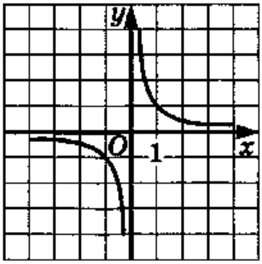


Рис. 18

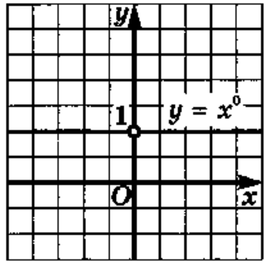


Рис. 19

Теперь познакомимся с функциями $y = x^r$, где r — положительное или отрицательное дробное число.

Рассмотрим в качестве примера функцию $y = x^{2,5}$. Область её определения — луч $[0; +\infty)$. Построим на этом луче графики функций $y = x^2$ (ветвь параболы) и $y = x^3$ (ветвь кубической параболы) — эти графики изображены на рис. 20. Обратите внимание: на интервале $(0; 1)$ кубическая парабола располагается ниже, а на открытом луче $(1; +\infty)$ выше параболы.

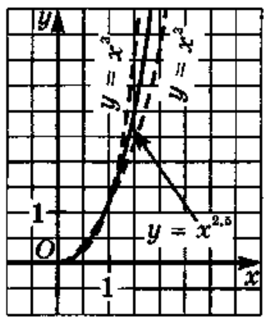


Рис. 20

Нетрудно убедиться в том, что график функции $y = x^{2,5}$ проходит через точки $(0; 0)$ и $(1; 1)$, как и графики функций $y = x^2$, $y = x^3$. При остальных значениях аргумента x график функции $y = x^{2,5}$ находится между графиками функций $y = x^2$ и $y = x^3$ (рис. 20). Почему? Смотрите.

1) Если $0 < x < 1$, то

$$x^6 < x^5 < x^4;$$

$$\sqrt{x^6} < \sqrt{x^5} < \sqrt{x^4};$$

$$x^3 < x^{2,5} < x^2.$$

2) Если $x > 1$, то

$$x^4 < x^5 < x^6;$$
$$\sqrt{x^4} < \sqrt{x^5} < \sqrt{x^6};$$
$$x^2 < x^{2,5} < x^3.$$

График функции $y = x^{2,5}$ изображён на рис. 20 (сплошная линия). Примерно так же обстоит дело для любой степенной функции вида $y = x^r$, где $r = \frac{m}{n}$ — неправильная дробь (числитель больше знаменателя). Её графиком является кривая, похожая на ветвь параболы. Чем больше показатель r, тем «круче» устремлена эта кривая вверх.

Свойства функции $y = x^{\frac{m}{n}}$, где $\frac{m}{n} > 1$:

1) $D(f) = [0; +\infty)$;
2) не является ни чётной, ни нечётной;
3) возрастает на $[0; +\infty)$;
4) не ограничена сверху, ограничена снизу;
5) не имеет наибольшего значения; $y_{наим} = 0$;
6) непрерывна;
7) $E(f) = [0; +\infty)$;
8) выпукла вниз.

Сделаем некоторые комментарии к свойствам 1)—8). Свойства 1) и 2) достаточно ясны. Свойство 8) мы доказать не в состоянии, поскольку у нас нет формального определения выпуклости, ограничимся наглядно-интуитивными представлениями. Докажем свойство 3).

Пусть $f(x) = x^{\frac{m}{n}}$, $0 \leqslant x_1 < x_2$. Тогда $x_1^m < x_2^m$, $\sqrt[n]{x_1^m} < \sqrt[n]{x_2^m}$, т. е. $x_1^{\frac{m}{n}} < x_2^{\frac{m}{n}}$.

Итак, из $0 \leqslant x_1 < x_2$ следует $f(x_1) < f(x_2)$, т. е. функция возрастает.

Докажем свойство 4). Ограниченность функции снизу очевидна, поскольку для любого $x \geqslant 0$ выполняется неравенство $x^{\frac{m}{n}} \geqslant 0$. Неограниченность сверху докажем методом от противного: предположим, что функция ограничена сверху, т. е. существует число $M > 0$ такое, что для любого неотрицательного x выполняется неравенство $f(x) \leqslant M$.

Возьмём на луче $[0; +\infty)$ точку $x_0 = (M + 1)^{\frac{n}{m}}$. Тогда $f(x_0) = ((M + 1)^{\frac{n}{m}})^{\frac{m}{n}} = M + 1 > M$.

Это противоречит предположению о том, что для любого неотрицательного x выполняется неравенство $f(x) \leqslant M$. Значит, наше предположение неверно, функция сверху не ограничена. Отсюда, кстати, сразу следует и свойство 5).

Свойство 6) будет обосновано ниже. Наконец, свойство 7) следует из того, что непрерывная функция отображает промежуток в промежуток.

Рассмотрим степенную функцию $y = x^{\frac{m}{n}}$ для случая, когда $\frac{m}{n}$ — правильная дробь ($0 < \frac{m}{n} < 1$). Всё рассмотренное в § 5 в отношении функции $y = \sqrt[n]{x}$, $x \geqslant 0$, или, что то же самое, $y = x^{\frac{1}{n}}$ (её график изображён на рис. 6), имеет место и по отношению к любой степенной функции вида $y = x^r$, где $r = \frac{m}{n}$ — правильная дробь (числитель меньше знаменателя). График функции $y = x^r$ изображён (схематически) на рис. 21.

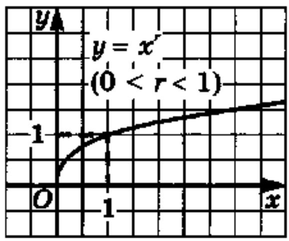


Рис. 21

Свойства функции $y = x^{\frac{m}{n}}$, где $0 < \frac{m}{n} < 1$:

1) $D(f) = [0; +\infty)$;
2) не является ни чётной, ни нечётной;
3) возрастает на $[0; +\infty)$;
4) не ограничена сверху, ограничена снизу;
5) не имеет наибольшего значения; $y_{наим} = 0$;
6) непрерывна;
7) $E(f) = [0; +\infty)$;
8) выпукла вверх.

Нам осталось рассмотреть степенную функцию вида $y = x^{-\frac{m}{n}}$. Область её определения — открытый луч $(0; +\infty)$. Выше мы построили график степенной функции $y = x^{-n}$, где n — натуральное

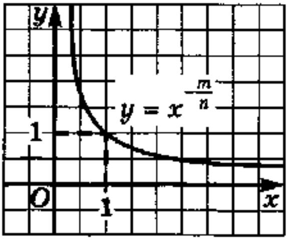


Рис. 22

число. При $x > 0$ график функции $y = x^{-n}$ похож на ветвь гиперболы (рис. 18). Точно так же обстоит дело для любой степенной функции вида $y = x^{-\frac{m}{n}}$, график которой изображён на рис. 22. Отметим, что график данной функции имеет горизонтальную асимптоту $y = 0$ и вертикальную асимптоту $x = 0$.

Свойства функции $y = x^{-\frac{m}{n}}$:

1) $D(f) = (0; +\infty)$;
2) не является ни чётной, ни нечётной;
3) убывает на $(0; +\infty)$;
4) не ограничена сверху, ограничена снизу;
5) не имеет ни наибольшего, ни наименьшего значения;
6) непрерывна;
7) $E(f) = (0; +\infty)$;
8) выпукла вниз.

Докажите самостоятельно свойства 3), 4) и 5).

Вы, наверное, заметили, что мы пока ничего не сказали о свойстве дифференцируемости степенной функции. Начнём издалека.

Мы знаем, чему равна производная функции $y = x^n$, где n — натуральное число:

$$(x^n)' = nx^{n-1}. \tag{1}$$

Нетрудно найти производную степенной функции $y = x^{-n}$, где n — натуральное число. Для этого надо переписать выражение x^{-n} в виде $\frac{1}{x^n}$ и воспользоваться правилом дифференцирования дроби:

$$(x^{-n})' = \left(\frac{1}{x^n}\right)' = \frac{(1)' \cdot x^n - 1 \cdot (x^n)'}{(x^n)^2} = \frac{0 \cdot x^n - nx^{n-1}}{x^{2n}} = \frac{-nx^{n-1}}{x^{2n}} = -nx^{-n-1}.$$

Итак, для любого $x \neq 0$ справедлива формула

$$(x^{-n})' = -nx^{-n-1}. \tag{2}$$

Формулы (1) и (2) можно объединить в одну:

$$(x^m)' = mx^{m-1}, \tag{3}$$

где m — любое целое число (кроме нуля).

Идём дальше. Мы знаем, что $\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$. Эту формулу можно записать следующим образом:

$$\left(x^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}. \qquad (4)$$

И формула (3), и формула (4) являются частными случаями общего утверждения.

Теорема. ***Если $x > 0$ и r — рациональное число, то производная степенной функции $y = x^r$ вычисляется по формуле***

$$(x^r)' = rx^{r-1}. \qquad (5)$$

Доказательство. Если r — целое число, то формула $(x^r)' = rx^{r-1}$ верна — это уже доказано выше. Значит, нам осталось доказать формулу (5) для случая, когда $r = \frac{m}{n}$, где $m \in Z$ ($m \neq 0$), $n \in N$, $n \neq 1$.

Пусть для начала $r = \frac{1}{n}$. Функция $y = x^{\frac{1}{n}}$, т. е. $y = \sqrt[n]{x}$, является обратной по отношению к функции $x = y^n$. Значит, мы можем воспользоваться правилом дифференцирования обратной функции (см. «Алгебра и начала математического анализа–10», § 42), согласно которому $y'_x = \frac{1}{x'_y}$. Получим:

$$y'_x = (x^{\frac{1}{n}})' = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{(y^n)'} = \frac{1}{ny^{n-1}} = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{(x^{\frac{1}{n}})^{n-1}} = \frac{1}{n} \cdot x^{\frac{1}{n}-1}.$$

Итак, мы доказали, что $(x^{\frac{1}{n}})' = \frac{1}{n} \cdot x^{\frac{1}{n}-1}$, т. е. что для $r = \frac{1}{n}$ формула (5) верна.

Рассмотрим общий случай: $r = \frac{m}{n}$. Воспользуемся тем, что $x^{\frac{m}{n}} = (x^{\frac{1}{n}})^m$, и правилом дифференцирования сложной функции (см. «Алгебра и начала математического анализа–10», § 42). Получим:

$$(x^{\frac{m}{n}})' = ((x^{\frac{1}{n}})^m)' = m(x^{\frac{1}{n}})^{m-1} \cdot (x^{\frac{1}{n}})' = mx^{\frac{m}{n}-\frac{1}{n}} \cdot \frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1} = \frac{m}{n}x^{\frac{m}{n}-1}.$$

Итак, мы доказали, что $(x^{\frac{m}{n}})' = \frac{m}{n} \cdot x^{\frac{m}{n}-1}$, т. е. что для $r = \frac{m}{n}$ формула (5) верна. Теорема полностью доказана.

Из дифференцируемости функции $y = x^r$ на $(0; +\infty)$ вытекает и её непрерывность на $(0; +\infty)$.

Пример 1. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y = x^{\frac{3}{2}}$:

а) на отрезке $[1; 9]$; б) на интервале $(0; 4)$; в) на луче $[25; +\infty]$.

Решение. Воспользуемся тем, что функция $y = x^{\frac{3}{2}}$ возрастает и, следовательно, свои наименьшее и наибольшее значения достигает соответственно в левом и правом концах заданного промежутка, если, разумеется, концы промежутка принадлежат самому промежутку.

а) $y_{\text{наим}} = 1^{\frac{3}{2}} = \sqrt{1^3} = 1$; $y_{\text{наиб}} = 9^{\frac{3}{2}} = \sqrt{9^3} = 3^3 = 27$.

б) Здесь нет ни наименьшего, ни наибольшего значения функции, поскольку концы промежутка — точки 0 и 4 — интервалу $(0; 4)$ не принадлежат.

в) $y_{\text{наим}} = 25^{\frac{3}{2}} = \sqrt{25^3} = 5^3 = 125$; $y_{\text{наиб}}$ не существует. ■

Пример 2. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y = \frac{16}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{3}x^3$ на отрезке $[1; 9]$.

Решение. Воспользуемся алгоритмом отыскания наибольшего и наименьшего значений непрерывной функции на отрезке (см. «Алгебра и начала математического анализа–10», § 46).

1) $y' = \frac{16}{3} \cdot \frac{3}{2} \cdot x^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{3} \cdot 3x^2 = 8\sqrt{x} - x^2$.

2) Производная существует при всех $x > 0$, значит, критических точек у функции нет, а стационарные найдём из условия $y' = 0$. Имеем:

$$8\sqrt{x} - x^2 = 0;$$

$$8\sqrt{x} = x^2;$$

$$\left(8\sqrt{x}\right)^2 = (x^2)^2;$$

$$64x = x^4;$$

$$x(x^3 - 64) = 0;$$

$$x_1 = 0;\ x_2 = 4.$$

Отрезку $[1; 9]$ принадлежит лишь точка $x = 4$.

3) Составим таблицу значений функции $y = \frac{16}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{3}x^3$, включив в неё концы отрезка — точки $x = 1$ и $x = 9$ — и найденную стационарную точку $x = 4$.

x	1	4	9
y	5	$21\frac{1}{3}$	-99

Таким образом, $y_{наим} = -99$ (достигается в точке $x = 9$);

$y_{наиб} = 21\frac{1}{3}$ (достигается в точке $x = 4$). ■

Пример 3. Решить уравнение $x^{\frac{2}{3}} = 12 - x$.

Решение. Нетрудно подобрать один корень этого уравнения: $x = 8$. В самом деле,

$$8^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{8^2} = 4 \text{ и } 12 - 8 = 4,$$

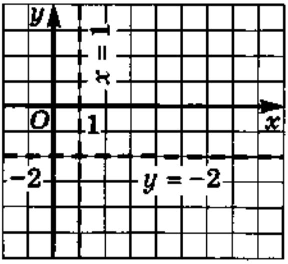
значит, при $x = 8$ уравнение обращается в верное числовое равенство $4 = 4$.

Так как степенная функция $y = x^{\frac{2}{3}}$ возрастает, а линейная функция $y = 12 - x$ убывает, то других корней у уравнения нет.

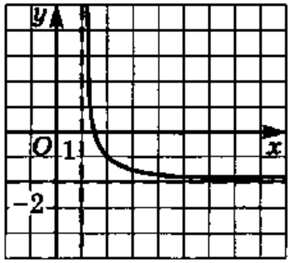
Ответ: 8.

Пример 4. Построить график функции $y = (x - 1)^{-\frac{2}{3}} - 2$.

Решение. 1) Перейдём к вспомогательной системе координат с началом в точке $(1; -2)$ — пунктирные прямые $x = 1$ и $y = -2$ проведены на рис. 23, *а*.



а



б

Рис. 23

2) «Привяжем» функцию $y = x^{-\frac{2}{3}}$ к новой системе координат. Это и будет требуемый график (рис. 23, *б*). ■

Пример 5. Составить уравнение касательной к графику функции:

а) $y = \frac{1}{x}$ в точке $x = 1$; б) $y = x^{-\frac{2}{3}}$ в точке $x = 1$.

Решение. Напомним общий вид уравнения касательной:

$$y = f(a) + f'(a)(x - a). \quad (7)$$

Воспользуемся алгоритмом составления уравнения касательной (см. «Алгебра и начала математического анализа–10», § 43).

а) $f(x) = \frac{1}{x}$;

1) $a = 1$;

2) $f(a) = f(1) = \frac{1}{1} = 1$;

3) $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$; $f'(a) = f'(1) = -\frac{1}{1^2} = -1$.

4) Подставим найденные числа $a = 1$, $f(a) = 1$, $f'(a) = -1$ в формулу (7):

$$y = 1 - (x - 1),$$
$$y = 2 - x.$$

б) $f(x) = x^{-\frac{2}{3}}$;

1) $a = 1$;

2) $f(a) = f(1) = \frac{1}{1} = 1$;

3) $f'(x) = -\frac{2}{3} \cdot x^{-\frac{2}{3}-1} = -\frac{2}{3} \cdot x^{-\frac{5}{3}}$; $f'(1) = -\frac{2}{3}$.

4) Подставим найденные числа $a = 1$, $f(a) = 1$, $f'(a) = -\frac{2}{3}$ в формулу (7):

$$y = 1 - \frac{2}{3}(x - 1);$$

$$y = -\frac{2}{3}x + \frac{5}{3}.$$

Ответ: а) $y = 2 - x$; б) $y = -\frac{2}{3}x + \frac{5}{3}$.

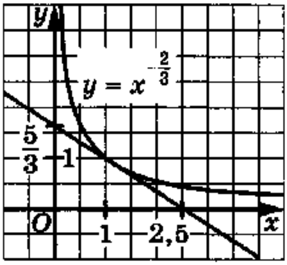


Рис. 24

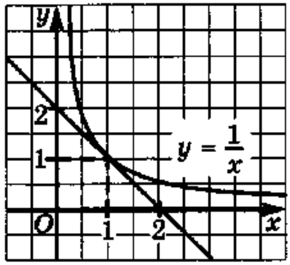


Рис. 25

З а м е ч а н и е. График функции $y = x^{-\frac{2}{3}}$ похож на ветвь гиперболы $y = \frac{1}{x}$: оба графика имеют своими асимптотами оси координат, оба графика проходят через точку (1; 1). Но их поведение в точке (1; 1) различно, у них, как мы увидели при решении примера 5, разные касательные в этой точке (рис. 24, 25).

Существует довольно красивый способ построения касательной к графику степенной функции $y = x^r$ в точке $x = a$, где $a > 0$. Составим уравнение касательной в общем виде ($y = f(a) + f'(a)(x - a)$); для заданной степенной функции получим

$$y = a^r + ra^{r-1}(x - a).$$

Найдём точку пересечения касательной с осью x, т. е. с прямой $y = 0$:

$$0 = a^r + ra^{r-1}(x - a);$$

$$a + r(x - a) = 0;$$

$$x = \frac{r-1}{r}a. \tag{8}$$

Таким образом, чтобы построить касательную к графику функции $y = x^r$ в точке $x = a$, где $a > 0$, нужно найти на оси x точку $x = \frac{r-1}{r}a$ и провести прямую через эту точку и точку касания. Если, например, $r = 2$, т. е. речь идёт о функции $y = x^2$, то по формуле (8) получаем $x = \frac{a}{2}$. Это значит, что для построения касательной нужно разделить отрезок $[0; a]$ оси x пополам и полученную точку соединить с точкой касания (рис. 26). Если $r = 3$, т. е. речь идёт о функции $y = x^3$, то по формуле (8) получаем $x = \frac{2a}{3}$. Способ построения касательной показан на рис. 27. Если $r = -1$, т. е. речь идёт о функции $y = \frac{1}{x}$, то по формуле (8) получаем $x = 2a$.

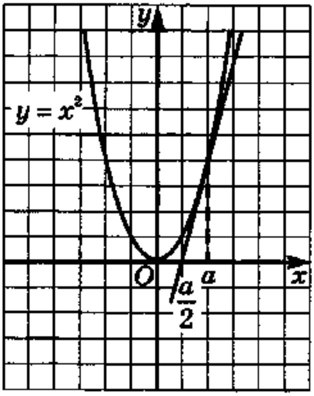


Рис. 26

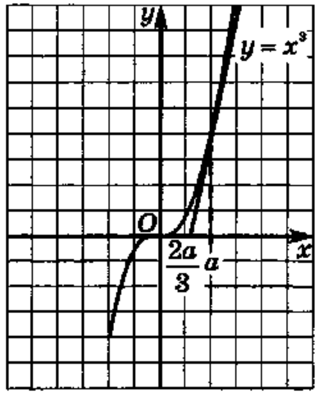


Рис. 27

Способ построения касательной показан на рис. 28. Если, наконец, $r = \frac{1}{2}$, т. е. речь идёт о функции $y = \sqrt{x}$, то по формуле (8) получаем $x = -a$. Способ построения касательной показан на рис. 29.

Пример 6. Построить график функции $y = \sqrt[3]{\sin^2 x}$.

Решение. Отметим некоторые свойства заданной функции, которые помогут нам построить её график.

1. $D(f) = (-\infty; +\infty)$.

2. Функция периодическая, её основной период равен π. В самом деле, функцию можно преобразовать к виду $y = \sqrt[3]{\frac{1 - \cos 2x}{2}}$, откуда и следует, что её основной период равен $\frac{2\pi}{2}$ (см. «Алгебра и начала математического анализа–10», § 9, 16, 19), т. е. π. Значит, чтобы построить весь график, нужно построить ветвь графика на отрезке $[0; \pi]$, где $\sin x \geqslant 0$, а затем, воспользовавшись периодичностью функции, построить весь график.

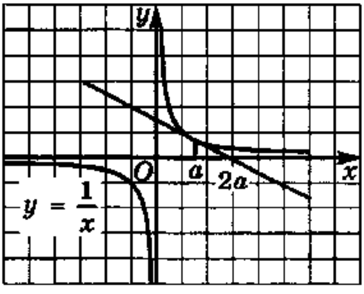


Рис. 28

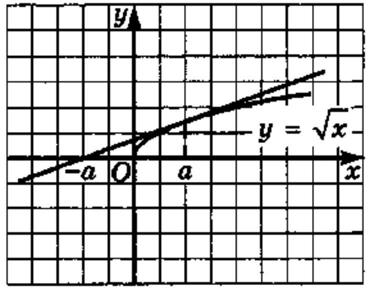


Рис. 29

3. Найдём производную заданной функции:

$$y' = \left((\sin\ x)^{\frac{2}{3}}\right)' = \frac{2}{3}(\sin\ x)^{\frac{2}{3}-1}\cdot(\sin\ x)' = \frac{2}{3}(\sin\ x)^{-\frac{1}{3}}\cdot\cos\ x = \frac{2\cos\ x}{3\sqrt[3]{\sin\ x}}.$$

Найдём стационарные и критические точки функции на отрезке $[0; \pi]$: $y' = 0$, когда $\cos x = 0$, т. е. при $x = \frac{\pi}{2}$; y' не существует, когда $\sin x = 0$, т. е. при $x = 0$ или при $x = \pi$. В обеих критических точках (т. е. в точках 0 и π) заданная функция обращается в 0, а в стационарной точке $x = \frac{\pi}{2}$ значение функции равно 1 — это точка максимума. Других точек экстремума на рассматриваемом отрезке у функции нет.

4. Функция непрерывна на всей числовой прямой.

Ветвь графика заданной функции на отрезке $[0; \pi]$ представлена на рис. 30, а весь график — на рис. 31. Обратите внимание: в каждой из критических точек (это точки вида $x = \pi n$) касательная к графику перпендикулярна оси абсцисс. ■

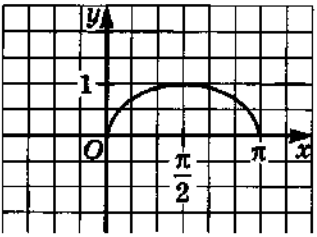


Рис. 30

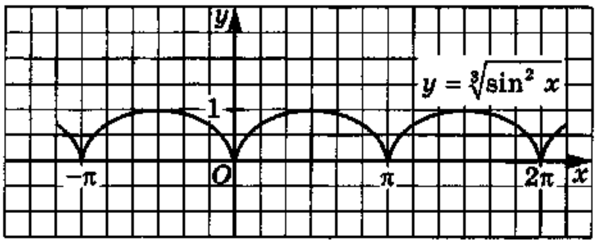


Рис. 31

Вопросы для самопроверки

1. Какие из перечисленных ниже степенных функций убывают, какие — возрастают, а какие не являются монотонными:

$$y = x^{\frac{2}{3}},\ y = x^{\frac{3}{2}},\ y = x^{-0,6},\ y = x^{11},\ y = x^{-11},\ y = x^{-2\frac{2}{7}}?$$

2. Какие из перечисленных ниже степенных функций выпуклы вверх, а какие — выпуклы вниз: $y = x^{\frac{2}{3}}$, $y = x^{\frac{3}{2}}$, $y = x^{-0,6}$, $y = x^{11}$, $y = x^{-11}$, $y = x^{-2\frac{2}{7}}$, $y = x^{2,7}$, $y = x^{0,11}$?

3. Попробуйте устно найти наибольшее значение функции $y = \begin{cases}\sqrt[3]{x},\ 0 \leqslant x \leqslant 1,\\ 2 - x,\ x > 1.\end{cases}$ Есть ли у неё наименьшее значение?

4. Как найти производную функции $y = x^r$, где $r \in Q$?

5. Найдите производную для каждой из указанных ниже функций: $y = x^{\frac{2}{3}}$, $y = x^{\frac{3}{2}}$, $y = x^{-0,6}$, $y = x^{11}$, $y = x^{-11}$, $y = x^{-2\frac{2}{7}}$, $y = x^{2,7}$, $y = x^{0,11}$, $y = \sqrt[3]{x}$, $y = \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$.

6. Дана функция $y = \frac{2}{3}x - \sqrt[3]{x^2}$.

а) Найдите нули функции.

б) Найдите производную функции.

в) Убедитесь в том, что $x = 0$ — критическая, а $x = 1$ — стационарная точка функции.

г) Объясните, почему касательная к графику функции в точке $x = 0$ перпендикулярна оси абсцисс, а в точке $x = 1$ параллельна оси абсцисс.

д) Найдите точки экстремума функции.

е) Постройте схематически график функции.

ж) Изменится ли график, если функцию записать в виде $y = \frac{2}{3}x - x^{\frac{2}{3}}$? Как он будет выглядеть?

§ 10. Извлечение корней из комплексных чисел

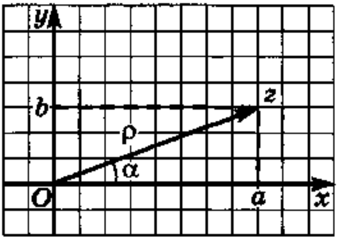
До сих пор мы говорили об операции извлечения корня из действительного числа. А как обстоит дело на множестве комплексных чисел? Прежде чем говорить об этом, вспомним вкратце, что мы знаем о комплексных числах из курса 10-го класса.

Каждое отличное от нуля комплексное число z может быть записано в двух формах: в алгебраической и в тригонометрической.

Алгебраическая форма	Тригонометрическая форма
$z = x + iy$	$z = \rho(\cos\alpha + i\sin\alpha)$
$x = \mathrm{Re}\, z$ — действительная часть z $y = \mathrm{Im}\, z$ — мнимая часть z	$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\rho = \lvert z \rvert$ ρ — модуль числа z

Алгебраическая запись (запись в декартовых координатах) однозначна: равенство двух комплексных чисел означает, что равны их действительные части и равны их мнимые части. Короче говоря,

$$x_1 + iy_1 = x_2 + iy_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2,\ y_1 = y_2.$$



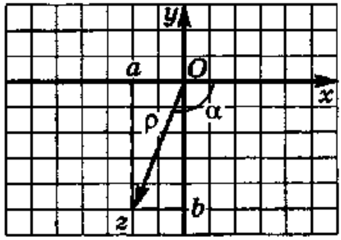


Рис. 32

В тригонометрической форме больше неопределённости:

$$\rho_1(\cos\alpha_1 + i\sin\alpha_1) = \rho_2(\cos\alpha_2 + i\sin\alpha_2) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \rho_1 = \rho_2,\ \alpha_1 - \alpha_2 = 2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}.$$

Другими словами, модуль $\rho = |z|$ данного комплексного числа z определён однозначно, а вот к числу α можно прибавлять числа, кратные 2π, — ведь это период тригонометрических функций косинус и синус. Из всех возможных тригонометрических записей числа z, как правило, выбирают «самую простую»: в ней $\alpha \in (-\pi; \pi]$. Такую запись мы называли *стандартной тригонометрической формой*, а α — *аргументом* комплексного числа z.

На рис. 32 представлена геометрическая интерпретация числа $z = a + bi = \rho(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ в комплексной плоскости.

Пример 1. Сколько различных комплексных чисел среди перечисленных:

$$z_1 = 1 - i\sqrt{3},\quad z_2 = 2\left(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}\right),$$

$$z_3 = 8^{\frac{1}{6}}(\cos 2{,}25\pi + i\sin 2{,}25\pi),\quad z_4 = C_{16}^2(5!)^{-1} + 2i\cos\frac{17\pi}{6},$$

$$z_5 = \sqrt[20]{10^3 + \operatorname{tg}^6\frac{\pi}{3} + \sqrt[3]{-27}}\,(2\cos^2 0{,}125\pi - 1 + i\sin(\pi\cdot 2^{-2}))?$$

Решение. Запишем числа z_2, z_3, z_4, z_5 в алгебраической форме:

$$z_2 = 2\left(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}\right) = 2\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 1 - i\sqrt{3} = z_1;$$

$$z_3 = 8^{\frac{1}{6}}(\cos 2{,}25\pi + i\sin 2{,}25\pi) = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) = 1 + i;$$

$$z_4 = C_{16}^2(5!)^{-1} + 2i\cos\frac{17\pi}{6} = \frac{16\cdot 15}{2\cdot 120} + 2i\cos\frac{5\pi}{6} =$$

$$= 1 + 2i\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 1 - i\sqrt{3} = z_1;$$

$$z_5 = \sqrt[20]{1000 + (\sqrt{3})^6 - 3}\left(\left(1 + \cos\frac{\pi}{4}\right) - 1 + i\sin\frac{\pi}{4}\right) =$$

$$= \sqrt[20]{1024}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 1 + i = z_3.$$

Таким образом, для пяти заданных чисел выполняются следующие соотношения: $z_1 = z_2 = z_4$; $z_3 = z_5$; различных чисел всего два. ■

Сложение и вычитание комплексных чисел в алгебраической форме выполняются *покоординатно*:

$$(x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2),$$
$$(x_1 + iy_1) - (x_2 + iy_2) = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2).$$

Умножение следует выполнять как обычное умножение числовых или буквенных выражений, но только с учётом основного для комплексных чисел равенства $i^2 = -1$. Значит,

$$(x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = x_1x_2 + iy_1x_2 + ix_1y_2 + iy_1iy_2 =$$
$$= (x_1x_2 - y_1y_2) + i(y_1x_2 + x_1y_2).$$

В частности, если $z = x + iy$, то $(x + iy)(x - iy) = x^2 + y^2 = |z|^2$. Число $x - iy$ называют числом, *сопряжённым* числу z, и обозначают $\bar{z}$. Таким образом, $z \cdot \bar{z} = |z|^2$. Из этой формулы, в частности, можно получить правило для вычисления $\frac{1}{z}$. Смотрите: $z \cdot \frac{\bar{z}}{|z|^2} = 1$, т. е. $\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$ или $\frac{1}{x + iy} = \frac{x - iy}{x^2 + y^2}$. Итак,

$$\frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} = \frac{(x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2)}{x_2^2 + y_2^2}.$$

Складывать и вычитать комплексные числа в тригонометрической форме неудобно, надо переходить к алгебраической форме, выполнять действия, а потом возвращаться к тригонометрической форме. Обычно такие переходы полностью и не выполняют. Значительно удобнее в тригонометрической форме выполнять умножение и деление.

Если $z_1 = \rho_1(\cos\alpha + i\sin\alpha_1)$ и $z_2 = \rho_2(\cos\beta + i\sin\beta)$, то

$$z_1z_2 = \rho_1\rho_2(\cos(\alpha + \beta) + i\sin(\alpha + \beta)),$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2}(\cos(\alpha - \beta) + i\sin(\alpha - \beta)).$$

Иногда говорят, что при умножении комплексных чисел модули перемножаются и аргументы «складываются», а при делении комплексных чисел модули делятся и аргументы «вычитаются». Если сумма $\alpha + \beta$ (разность $\alpha - \beta$) аргументов окажется вне пределов основного промежутка $(-\pi; \pi]$, то для нахождения аргумента произведения или частного следует прибавить или отнять 2π. Именно поэтому термины «складываются» и «вычитаются» взяты в кавычки.

Если правило умножения применить к n одинаковым множителям, то получится знаменитая формула Муавра:

$$(\rho(\cos\alpha + i\sin\alpha))^n = \rho^n(\cos n\alpha + i\sin n\alpha),\ n \in N.$$

Она верна и для целых отрицательных показателей степени n. Из неё видно, что все тонкости, связанные с возведением комплексных чисел в целую степень, так или иначе, связаны с числовой окружностью на комплексной плоскости.

Пример 2. Пусть $z = 0{,}5(\cos 0{,}23\pi + i\sin 0{,}23\pi)$. Какие числа из множества $\{z, z^2, z^3, \ldots, z^9, z^{10}\}$:

а) расположены во второй координатной четверти;

б) расположены правее оси ординат и внутри круга радиуса 0,001 с центром в начале координат?

Решение. а) Сначала отметим на числовой окружности все степени $t^n = (\cos 0{,}23\pi + i\sin 0{,}23\pi)^n$, $n = 1, 2, \ldots, 10$. По формуле Муавра находим 10 чисел: $t^n = \cos 0{,}23\pi n + i\sin 0{,}23\pi n$, $n = 1, 2, \ldots, 10$. Им соответствуют на числовой окружности 10 точек: $0{,}23\pi$, $0{,}46\pi$, $0{,}69\pi$, $0{,}92\pi$, $1{,}15\pi$, $1{,}38\pi$, $1{,}61\pi$, $1{,}84\pi$, $2{,}07\pi$, $2{,}3\pi$ (рис. 33). Из них во вторую четверть, т. е. в промежуток от $0{,}5\pi$ до π, попали два числа $0{,}69\pi$, $0{,}92\pi$. Значит, во второй координатной четверти находятся только числа z^3 и z^4: ведь от умножения на $0{,}5^n$ изменятся лишь расстояния до начала координат.

б) Надо найти все числа z^n, для которых $|z^n| < 0{,}001$. Но $|z^n| = |z|^n = 0{,}5^n$. Значит, речь идёт о неравенстве $0{,}5^n < 0{,}001$. Оно выполняется только при $n = 10$ (для заданных десяти чисел). Итак, число $z^{10} = 0{,}5^{10}(\cos 2{,}3\pi + i\sin 2{,}3\pi)$ лежит внутри круга радиуса 0,001 с центром в начале координат. Поскольку аргумент числа равен $2{,}3\pi - 2\pi = 0{,}3\pi$, а это значение принадлежит первой четверти числовой окружности,

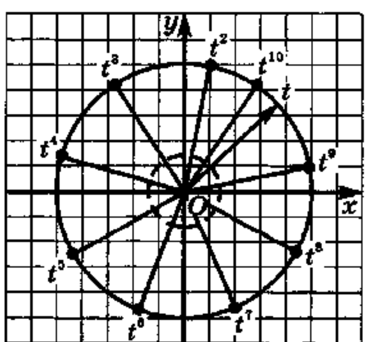


Рис. 33

получается, что число z^{10} расположено правее оси ординат, что и требуется в условии.

Ответ: а) z^3, z^4; б) z^{10}.

То, что было сказано выше, известно вам из курса 10-го класса. Теперь перейдём непосредственно к теме этого параграфа, т. е. к извлечению корней n-й степени из комплексных чисел. Как и для действительных чисел, такая операция является обратной по отношению к возведению в n-ю степень. Основных отличий, как мы увидим, два. Во-первых, извлекать корни n-й степени можно из *любых* комплексных чисел. Во-вторых, за исключением случая $z = 0$, корней n-й степени из заданного комплексного числа z *всегда имеется ровно* n.

Определение. **Корнем n-й степени** из комплексного числа z называют комплексное число, n-я степень которого равна z. Множество всех корней n-й степени из комплексного числа z обозначают $\sqrt[n]{z}$. **Извлечь корень n-й степени** из комплексного числа z — это значит найти множество $\sqrt[n]{z}$.

Заметим, что при $z = 0$ получим $\sqrt{0} = 0$. Всюду далее будем считать, что $z \neq 0$.

При $n = 2$ и $n = 3$ это определение совпадает с определениями соответственно квадратных и кубических корней из комплексных чисел («Алгебра и начала математического анализа–10», глава 6). Формула для нахождения $\sqrt[n]{z}$, как мы увидим, является обобщением формул для $\sqrt{z}$ и $\sqrt[3]{z}$. Напомним, что

$$\sqrt{z} = \sqrt{\rho(\cos\alpha + i\sin\alpha)} = \pm\sqrt{\rho}\left(\cos\frac{\alpha}{2} + i\sin\frac{\alpha}{2}\right) =$$

$$= \left\{\sqrt{\rho}\left(\cos\frac{\alpha + 2\pi k}{2} + i\sin\frac{\alpha + 2\pi k}{2}\right) \mid k = 0, 1\right\};$$

$$\sqrt[3]{z} = \sqrt[3]{\rho(\cos\alpha + i\sin\alpha)} =$$

$$= \left\{\sqrt[3]{\rho}\left(\cos\frac{\alpha + 2\pi k}{3} + i\sin\frac{\alpha + 2\pi k}{3}\right) \mid k = 0, 1, 2\right\}.$$

Например,

$$\sqrt[3]{i} = \left\{\sqrt[3]{1}\left(\cos\frac{\frac{\pi}{2} + 2\pi k}{3} + i\sin\frac{\frac{\pi}{2} + 2\pi k}{3}\right) \mid k = 0, 1, 2\right\} =$$

$$= \left\{\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}, \cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}, \cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}\right\} =$$

$$= \left\{\frac{\sqrt{3} + i}{2}, \frac{-\sqrt{3} + i}{2}, -i\right\} \text{ (рис. 34).}$$

Выведем формулу для нахождения $\sqrt[n]{z}$.

Теорема. ***Если*** $z = \rho(\cos\alpha + i\sin\alpha)$, ***то***

$$\sqrt[n]{\rho(\cos\alpha + i\sin\alpha)} =$$

$$= \left\{\sqrt[n]{\rho}\left(\cos\frac{\alpha + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\alpha + 2\pi k}{n}\right) \Big| \, k = 0, 1, 2, ..., n - 1\right\}$$

(здесь $\sqrt[n]{\rho}$ — обычный арифметический корень из положительного числа).

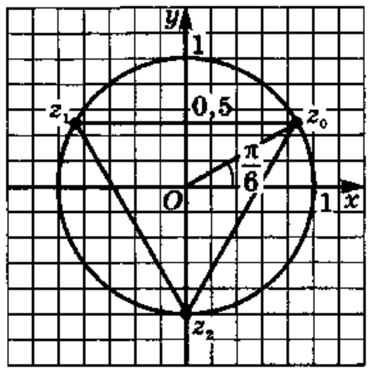


Рис. 34

Доказательство. Пусть $\sqrt[n]{z} = w$. Запишем w в тригонометрической форме: $w = r(\cos\beta + i\sin\beta)$. Тогда $w^n = r^n(\cos n\beta + i\sin n\beta)$. Поскольку, с другой стороны, $w^n = z$, то получаем равенство $r^n(\cos n\beta + i\sin n\beta) = \rho(\cos\alpha + i\sin\alpha)$.

В этом равенстве ρ и α считаются заданными, а найти надо r и β.

Использовав условие равенства комплексных чисел в тригонометрической форме, заключаем, что $r^n = \rho$, а $n\beta$ и α отличаются на слагаемое, кратное 2π, т. е. $r = \sqrt[n]{\rho}$, $n\beta - \alpha = 2\pi m$, $m \in \mathbf{Z}$. Для r ответ уже совпал с требуемым. Второе равенство запишем так: $n\beta = \alpha + 2\pi m$; значит, $\beta = \dfrac{\alpha + 2\pi m}{n}$, $m \in \mathbf{Z}$. Мы видим, что теорема практически доказана. Единственное отличие состоит в том, что у нас получилось $m \in \mathbf{Z}$, а в формулировке теоремы указано, что $k = 0, 1, 2, ..., n - 1$.

Представим m в виде $m = nl + k$, $0 \leqslant k < n$, $l \in \mathbf{Z}$, здесь k — остаток от деления m на n.

Имеем:

$$\sqrt[n]{\rho}(\cos\beta + i\sin\beta) = \sqrt[n]{\rho}\left(\cos\frac{\alpha + 2\pi m}{n} + i\sin\frac{\alpha + 2\pi m}{n}\right) =$$

$$= \sqrt[n]{\rho}\left(\cos\frac{\alpha + 2\pi(nl + k)}{n} + i\sin\frac{\alpha + 2\pi(nl + k)}{n}\right) =$$

$$= \sqrt[n]{\rho}\left(\cos\left(\frac{\alpha + 2\pi k}{n} + 2\pi l\right) + i\sin\left(\frac{\alpha + 2\pi k}{n} + 2\pi l\right)\right) =$$

$$= \sqrt[n]{\rho}\left(\cos\frac{\alpha + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\alpha + 2\pi k}{n}\right).$$

Таким образом, множества комплексных чисел

$$\left\{\sqrt[n]{\rho}\left(\cos\frac{\alpha + 2\pi m}{n} + i\sin\frac{\alpha + 2\pi m}{n}\right) \mid m \in Z\right\}$$

и $\left\{\sqrt[n]{\rho}\left(\cos\frac{\alpha + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\alpha + 2\pi k}{n}\right) \mid k = 0, 1, 2, \ldots, n - 1\right\}$

совпадают. Теорема доказана.

Пример 3. Найти $\sqrt[4]{1}$.

Решение. Представим число 1 в тригонометрической форме: $1 = 1 \cdot (\cos 0 + i\sin 0)$. Применим теорему:

$$\sqrt[4]{1 \cdot (\cos 0 + i\sin 0)} =$$

$$= \left\{\sqrt[4]{1}\left(\cos\frac{2\pi k}{4} + i\sin\frac{2\pi k}{4}\right) \mid k = 0, 1, 2, 3\right\}.$$

В ответе получаем четыре числа:

если $k = 0$, то $z_0 = \cos 0 + i\sin 0 = 1$;

если $k = 1$, то $z_1 = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} = i$;

если $k = 2$, то $z_2 = \cos\pi + i\sin\pi = -1$;

если $k = 3$, то $z_3 = \cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2} = -i$ (рис. 35).

Ответ: $\{\pm 1, \pm i\}$.

Пример 4. Найти $\sqrt[4]{-1}$.

Решение. Представим число -1 в тригонометрической форме: $-1 = \cos\pi + i\sin\pi$. Применим теорему:

$$\sqrt[4]{\cos\pi + i\sin\pi} = \left\{\left(\cos\frac{\pi + 2\pi k}{4} + i\sin\frac{\pi + 2\pi k}{4}\right) \mid k = 0, 1, 2, 3\right\}.$$

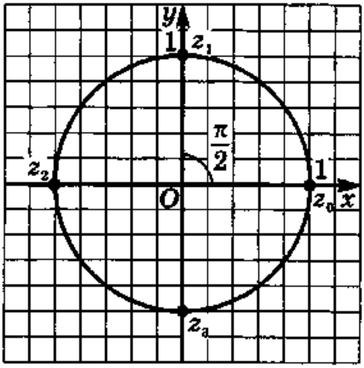


Рис. 35

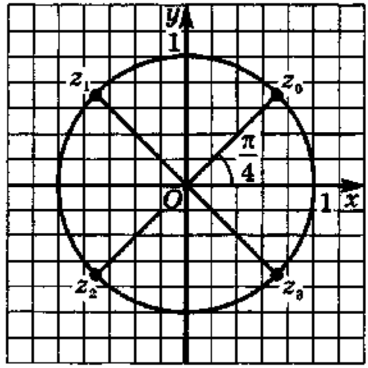


Рис. 36

В ответе получаем четыре числа:

если $k = 0$, то $z_0 = \cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$;

если $k = 1$, то $z_1 = \cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$;

если $k = 2$, то $z_2 = \cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$;

если $k = 3$, то $z_3 = \cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$ (рис. 36).

Ответ: $\left\{\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2},\ -\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2},\ -\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2},\ \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right\}$.

Пример 5. Найти тот из корней шестой степени из числа $-8i$, который принадлежит третьей четверти.

Решение. $\sqrt[6]{-8i} = \sqrt[6]{8\left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)} =$

$$= \left\{\sqrt{2}\left(\cos\frac{-0,5\pi + 2\pi k}{6} + i\sin\frac{-0,5\pi + 2\pi k}{6}\right) \middle|\, k = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\right\}.$$

Вычислим нужные значения $\alpha_k = \frac{-0,5\pi + 2\pi k}{6}$.

k	0	1	2	3	4	5
α_k	$-\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{7\pi}{12}$	$\frac{11\pi}{12}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{19\pi}{12}$

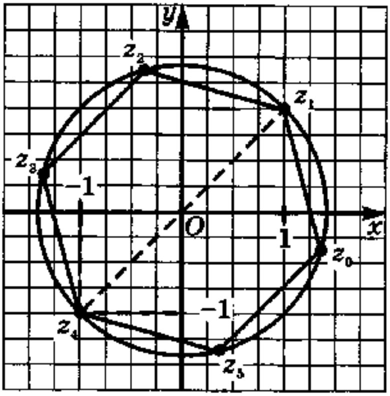


Рис. 37

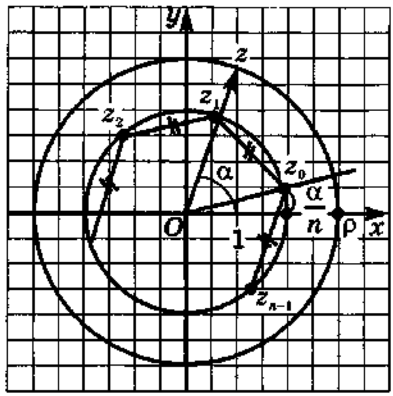


Рис. 38

Третьей четверти принадлежит значение $\frac{5\pi}{4}$, соответствующее значению параметра $k = 4$. Получаем:

$$z_4 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}\right) =$$

$$= -1 - i \text{ (рис. 37).}$$

***Ответ*: $-(1 + i)$.**

Можно сформулировать некоторый геометрический алгоритм извлечения корня n-й степени.

> ***Для извлечения корня n-й степени из комплексного числа z следует:***
>
> **1)** ***найти модуль ρ и аргумент α этого числа;***
>
> **2)** ***провести окружность радиусом $\sqrt[n]{\rho}$ с центром в начале координат;***
>
> **3)** ***провести из начала координат луч под углом $\frac{\alpha}{n}$ к положительному направлению оси абсцисс;***
>
> **4)** ***найти точку z_0 пересечения окружности и луча;***
>
> **5)** ***построить правильный n-угольник, вписанный в окружность, одной из вершин которого является z_0.***
>
> ***Вершины n-угольника образуют множество всех корней n-й степени из z*** **(рис. 38).**

Как и в случае нахождения квадратных и кубических корней, следует отметить, что с помощью циркуля и линейки этот алгоритм далеко не всегда может быть реализован. Дело в том, что существуют задачи на построение, не разрешимые с помощью

циркуля и линейки. К числу таких задач относится, например, *трисекция угла*, т. е. деление произвольного угла на три равные части. Также неразрешимой является задача о построении правильных 7- или 9-угольников, вписанных в данную окружность. В то же время Карл Гаусс в 1796 году в возрасте 18 лет доказал, что циркулем и линейкой можно построить правильный 17-угольник, вписанный в данную окружность. Более того, он доказал, что построение правильного p-угольника для простого p возможно в том случае, когда $p = 2^{2^n} + 1$, $n \in N$. Например, при $n = 0, 1, 2, 3$ получаются простые числа $p = 3, 5, 17, 257$.

Основной вывод, который можно сделать из всего сказанного выше, сформулируем следующим образом: *для любого отличного от нуля комплексного числа с уравнение $z^n - c = 0$ имеет n различных комплексных корней.*

Оказывается, это утверждение верно не только для простейшего многочлена $P(z) = z^n - c$, но и вообще для любого многочлена n-й степени. Этот факт базируется на так называемой *основной теореме алгебры.*

Основная теорема алгебры. *Любое уравнение*

$$a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_2 z^2 + a_1 z + a_0 = 0,\ a_n \neq 0$$

с комплексными коэффициентами имеет хотя бы один комплексный корень.

Если один корень, скажем z_1, найден, то (см. § 1, следствие из теоремы 3) многочлен, содержащийся в левой части уравнения, можно разложить на множители:

$$a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_2 z^2 + a_1 z + a_0 =$$

$$= (z - z_1)(b_{n-1} z^{n-1} + b_{n-2} z^{n-2} + \ldots + b_1 z + b_0),\ b_{n-1} = a_n \neq 0.$$

Применим аналогичное рассуждение к многочлену, содержащемуся во вторых скобках, — многочлену степени $n - 1$:

$$b_{n-1} z^{n-1} + b_{n-2} z^{n-2} + \ldots + b_1 z + b_0 =$$

$$= (z - z_2)(c_{n-2} z^{n-2} + c_{n-3} z^{n-3} + \ldots + c_1 z + c_0).$$

Повторив эту процедуру n раз, мы и получим n корней многочлена n-й степени, а многочлен будет представлен в виде произведения n линейных множителей:

$$a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_2 z^2 + a_1 z + a_0 =$$

$$= a_n (z - z_1)(z - z_2) \cdot \ldots \cdot (z - z_n).$$

Конечно, среди этих корней могут быть и одинаковые (*кратные корни*). Это означает, что среди скобок также встретятся одинаковые. Например, $P(z) = (z^3 - 3z^2 + 3z - 1)^3(z^2 + 1)^2(z - 2 - i)$ — многочлен 14-й степени; его можно преобразовать к виду $P(z) = (z - 1)^9(z - i)^2(z + i)^2(z - 2 - i)$. Четырнадцать корней многочлена таковы:

$$z_1 = z_2 = \ldots = z_9 = 1,\ z_{10} = z_{11} = i,\ z_{12} = z_{13} = -i,\ z_{14} = 2 + i.$$

Решение кубических уравнений. Разложение многочленов на линейные и квадратичные множители

Итальянский математик, философ и врач Джероламо Кардано (1501—1576) описал формулу для нахождения корней кубического уравнения $x^3 + px = q$ при $p > 0$ в книге «Великое искусство, или Об алгебраических правилах» (1545) так:

«...Куб третьей части числа “вещей”, к которому ты прибавляешь квадрат половины числа из уравнения и берёшь корень из всего полученного, — это квадратный корень, который ты используешь в одном случае, прибавляя половину числа, которое как раз умножал само на себя, в другом случае, вычитая ту же самую половину, и ты будешь иметь соответственно “бином” и “вычет”; затем вычти кубический корень из вычета из кубического корня из бинома и остаток от этого есть величина “вещи”...»

Оказывается, речь идёт о такой формуле:

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}.$$

Расскажем, как можно получить эту формулу. Начнём с тождества $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$, которое перепишем в следующем виде:

$$(a + b)^3 = a^3 + 3ab(a + b) + b^3;$$

$$(a + b)^3 - 3ab(a + b) - (a^3 + b^3) = 0;$$

$$x^3 - 3abx - (a^3 + b^3) = 0, \text{ где } x = a + b.$$

Придавая параметрам a и b различные действительные значения, мы будем получать различные кубические (приведённые) уравнения вида

$$x^3 + px + q = 0$$

с действительными коэффициентами p и q. Например:

a	b	$-3ab = p$	$-a^3 - b^3 = q$	Уравнение $x^3 + px + q = 0$	Корень $x = a + b$
−1	3	9	−26	$x^3 + 9x - 26 = 0$	2
4	3	−36	−91	$x^3 - 36x - 91 = 0$	7

Верно и обратное: по любому уравнению $x^3 + px + q = 0$ с действительными коэффициентами p и q можно восстановить параметры a и b, а значит, найти и корень $x = a + b$ приведённого кубического уравнения. Только вот a и b могут оказаться не действительными, а комплексными! Удивительно, что при этом сумма $x = a + b$ будет действительным числом. Получается, что при решении кубических уравнений, как и при решении квадратных уравнений с *действительными* коэффициентами, мы сталкиваемся с *комплексными* числами. Проиллюстрируем это конкретным примером.

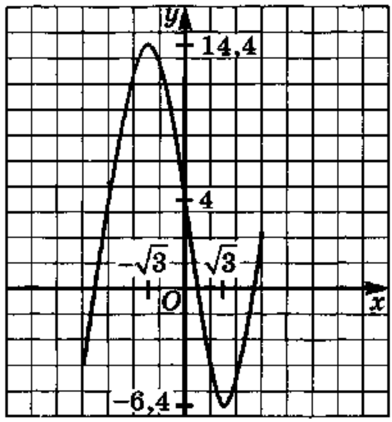


Рис. 39

Рассмотрим уравнение

$$x^3 - 9x + 4 = 0.$$

Построим график функции $y = x^3 - 9x + 4$. Имеем: $y' = 3x^2 - 9$, $y' = 0$ при $x = \pm\sqrt{3}$; $x = \sqrt{3}$ — точка минимума, $y_{\min} = 4 - 6\sqrt{3} \approx -6{,}4$; $x = -\sqrt{3}$ — точка максимума, $y_{\max} = 6\sqrt{3} + 4 \approx 14{,}4$. График представлен (схематично) на рис. 39.

Видим, что уравнение $x^3 - 9x + 4 = 0$ имеет три различных действительных корня.

Попробуем свести уравнение $x^3 - 9x + 4 = 0$ к уравнению вида $x^3 - 3abx - (a^3 + b^3) = 0$. Подберём a и b так, чтобы выполнялись равенства: $3ab = -p = 9$ и $a^3 + b^3 = -q = -4$. Обозначим $a^3 = c$, $b^3 = d$. Тогда $c + d = -4$, $cd = (ab)^3 = 27$. Так как $d = -4 - c$, то

$$cd = c(-4 - c) = -c^2 - 4c = 27;$$

$$c^2 + 4c + 27 = 0;$$

$$c_{1,\,2} = -2 \pm \sqrt{4 - 27} = -2 \pm i\sqrt{23};$$

$$d_{1,\,2} = -2 \mp i\sqrt{23}.$$

Значит, $x = a + b = \sqrt[3]{c_1} + \sqrt[3]{d_1} = \sqrt[3]{-2 + i\sqrt{23}} + \sqrt[3]{-2 - i\sqrt{23}}$. Отметим, что тот же ответ получится для другой пары c и d:

$$x = a + b = \sqrt[3]{c_2} + \sqrt[3]{d_2} = \sqrt[3]{-2 - i\sqrt{23}} + \sqrt[3]{-2 + i\sqrt{23}}.$$

Как мы знаем, $\sqrt[3]{-2 + i\sqrt{23}}$ и $\sqrt[3]{-2 - i\sqrt{23}}$ — это множества, состоящие из трёх комплексных чисел. Если формально производить попарные суммирования, то получится девять ответов вместо ожидаемых трёх. Оказывается, что из обоих множеств следует выбирать только пары сопряжённых комплексных чисел: ведь в сумме должны быть действительные ответы. Вот тогда в итоге и получатся три искомых действительных корня.

Итак, получается, что и сама задача об отыскании корней уравнения $x^3 - 9x + 4 = 0$, и все ответы к задаче «лежат» в действительных числах, а для решения и записи необходимо выходить за «действительные» пределы и использовать новые, комплексные числа! Дадим формулировку общей теоремы.

Теорема 1. ***Корни кубического уравнения*** $x^3 + px + q = 0$ ***находят по формуле Кардано***

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}.$$

При этом:

1) ***если*** $\Delta = \left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3 > 0$, ***то уравнение имеет ровно один действительный корень, который находится по указанной формуле;***

2) ***если*** $\Delta = 0$, ***то уравнение имеет два действительных корня, один из которых двукратный (исключение — случай*** $p = q = 0$, ***когда есть один трёхкратный корень*** $x = 0$***);***

3) ***если*** $\Delta < 0$, ***то уравнение имеет три действительных корня, которые равны удвоенным действительным частям трёх кубических корней из комплексного числа*** $-\frac{q}{2} + \sqrt{\Delta}$.

Теперь поговорим о разложении многочлена (с *действительными коэффициентами*) на множители. Самый хороший случай составляют многочлены n-й степени, у которых можно некоторым конструктивным способом найти n различных действительных корней. Тогда, как мы уже отметили выше,

$$P(x) = a_n(x - x_1)(x - x_2) \cdot \ldots \cdot (x - x_n).$$

Например, квадратный трёхчлен $ax^2 + bx + c$ с действительными коэффициентами $a \neq 0$, b, c и неотрицательным дискриминантом $D = b^2 - 4ac$ имеет два действительных корня x_1, x_2 и раскладывается на линейные множители: $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$. Если дискриминант

$D = b^2 - 4ac$ отрицателен, то действительных корней у многочлена $ax^2 + bx + c$ нет и его разложение на линейные множители в действительных числах невозможно.

Разберём случай многочленов третьей степени с действительными коэффициентами.

Теорема 2. ***Многочлен третьей степени $ax^3 + bx^2 + cx + d$ с действительными коэффициентами $a \neq 0$, b, c, d может быть разложен либо в произведение трёх многочленов первой степени, либо в произведение многочлена первой степени и квадратного трёхчлена с отрицательным дискриминантом.***

Доказательство. Докажем, что у многочлена $ax^3 + bx^2 + cx + d$ с действительными коэффициентами $a \neq 0$, b, c, d есть хотя бы один действительный корень. Для этого покажем сначала, что многочлен обязательно принимает как положительные, так и отрицательные значения. Запишем многочлен так:

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = ax^3\left(1 + \frac{b}{ax} + \frac{c}{ax^2} + \frac{d}{ax^3}\right).$$

Если x по модулю — достаточно большое число, то слагаемые $\frac{b}{ax}$, $\frac{c}{ax^2}$, $\frac{d}{ax^3}$ — достаточно маленькие числа. Поэтому множитель $\left(1 + \frac{b}{ax} + \frac{c}{ax^2} + \frac{d}{ax^3}\right)$ практически неотличим от единицы. В частности, он положителен. Значит, при достаточно больших по модулю значениях аргумента x знаки чисел $ax^3 + bx^2 + cx + d$ и ax^3 одинаковы. При положительных x знак числа ax^3 совпадает со знаком числа a, а при отрицательных x знак числа ax^3 совпадает со знаком числа $-a$. Следовательно, функция $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ принимает как положительные, так и отрицательные значения. Геометрически это означает, что на графике функции $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ есть как точки, лежащие выше оси абсцисс, так и точки, расположенные ниже оси абсцисс (рис. 40).

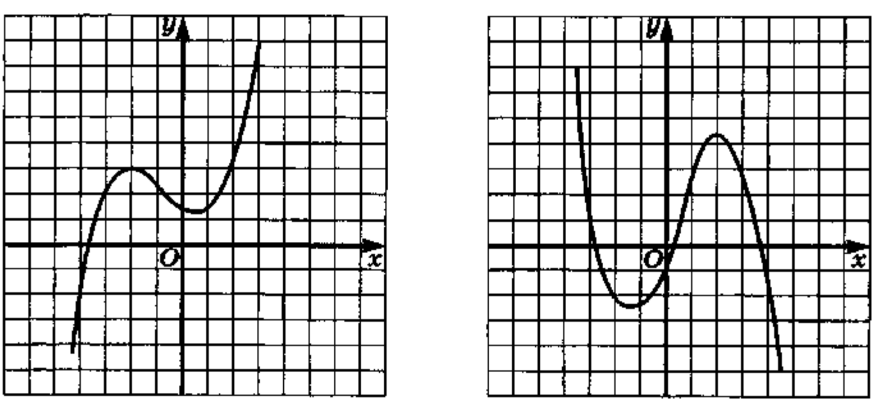


Рис. 40

При непрерывном изменении аргумента соответствующая точка графика также непрерывно будет перемещаться из верхней полуплоскости в нижнюю полуплоскость или, наоборот, из нижней в верхнюю. В какой-то момент график обязательно *пересечёт* ось абсцисс. Но это как раз и означает наличие нуля x_0 функции $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ или же корня x_0 многочлена $ax^3 + bx^2 + cx + d$. Тогда (см. § 1, следствие из теоремы 3) имеет место тождество

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = (x - x_0)(ax^2 + Bx + C).$$

Рассмотрим квадратный трёхчлен $ax^2 + Bx + C$. Если его дискриминант неотрицателен, то он раскладывается в произведение двух линейных множителей, а весь многочлен $ax^3 + bx^2 + cx + d$ раскладывается в произведение трёх линейных множителей. Если дискриминант отрицателен, то приходится ограничиться уже найденным разложением многочлена третьей степени на линейный и квадратичный множители.

Теорема доказана.

А как обстоит дело с многочленами четвёртой степени?

Теорема 3. ***Многочлен четвёртой степени $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + f$ с действительными коэффициентами можно разложить в произведение множителей, каждый из которых является или многочленом первой степени, или многочленом второй степени с действительными коэффициентами.***

Доказательство. Если у многочлена $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + f$ есть действительный корень, скажем x_0, то

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + f = (x - x_0)(ax^3 + Bx^2 + Cx + D).$$

После этого ко второму множителю следует применить предыдущую теорему и получить требуемое разложение многочлена.

Если у многочлена $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + f$ нет действительных корней, то рассмотрим многочлен $az^4 + bz^3 + cz^2 + dz + f$ с теми же коэффициентами, но от комплексной переменной z. Разложим этот многочлен на четыре линейных множителя:

$$az^4 + bz^3 + cz^2 + dz + f = a(z - z_1)(z - z_2)(z - z_3)(z - z_4).$$

Поскольку коэффициенты многочлена — действительные числа, то число, сопряжённое с корнем многочлена, также является корнем многочлена (см. «Алгебра и начала математического анализа–10», § 35). Это значит, что четыре корня z_1, z_2, z_3, z_4 на самом деле разбиты на пары сопряжённых комплексных чисел. Скажем, $z_2 = \bar{z}_1$, $z_4 = \bar{z}_3$. Отметим, что $z_1 \neq \bar{z}_1$, так как среди корней, по предположению, нет действительных. Аналогично и $z_3 \neq \bar{z}_3$.

Рассмотрим произведения:

$$(z - z_1)(z - z_2) = (z - z_1)(z - \bar{z}_1) = z^2 - (z_1 + \bar{z}_1)z + z_1\bar{z}_1 = z^2 - pz + q;$$
$$(z - z_3)(z - z_4) = (z - z_3)(z - \bar{z}_3) = z^2 - (z_3 + \bar{z}_3)z + z_3\bar{z}_3 = z^2 - sz + t.$$

Поскольку $z + \bar{z}$ и $z\bar{z}$ — действительные числа, то коэффициенты p, q, s и t — *действительные* числа. А это означает, что

$$az^4 + bz^3 + cz^2 + dz + f = a(z^2 - pz + q)(z^2 - sz + t)$$

для некоторых *действительных* чисел a, p, q, s и t.

В частности, возвращаясь к действительной переменной x, получаем искомое разложение:

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + f = a(x^2 - px + q)(x^2 - sx + t)$$

данного многочлена четвёртой степени в произведение двух многочленов второй степени с действительными коэффициентами и отрицательными дискриминантами.

Теорема доказана.

Примерно так же доказывается и общая теорема.

Теорема 4. ***Любой многочлен с действительными коэффициентами можно разложить на множители, каждый из которых является или многочленом первой степени, или многочленом второй степени с действительными коэффициентами.***

Вопросы для самопроверки

1. Что называют корнем n-й степени из комплексного числа?

2. Верно ли, что $\sqrt{3 - 4i} = 2 - i$?

3. Сколько значений имеет $\sqrt[3]{8i}$? Верно ли, что одним из этих значений является $2i$?

4. Сформулируйте основную теорему алгебры.

Некоторые исторические сведения

На содержательном уровне задачи о вычислении квадратных и кубических корней из чисел решались одновременно с появлением квадратных и кубических уравнений (см. «Некоторые исторические сведения» к гл. 1). Пожалуй, наиболее известной задачей такого типа была задача об *удвоении куба*. По одной из легенд, следуя предсказаниям пифий, жители греческого острова Делос должны были удвоить объём масла в кубическом жертвеннике. В нашей терминологии, зная ребро a одного куба, следовало построить ребро $a\sqrt[3]{2}$ куба вдвое большего объёма. Одно из первых решений, основанное на наличии начерченной кривой третьего порядка (*циссоида*), относится к III в. до н. э. Приёмы вычисления квадратных и кубических корней содержатся в древнекитайском трактате «Математика в девяти книгах» (II в. до н. э.).

Герон Александрийский (I в. н. э.) использовал для приближённых вычислений формулу (известную ещё в Древнем Вавилоне) $\sqrt{n} \approx 0{,}5\,(a + n : a)$, где a — наибольший целый квадрат, не превосходящий n, а вычисление $n < \sqrt[3]{n^3 + b} < n + 1$ производил так: $\sqrt[3]{n^3 + b} \approx n + b(n + 1) : (b(n + 1) + n((n + 1)^3 - n^3 - b))$.

Возникновение привычной нам символики для степеней имеет весьма долгую историю. Например, на рубеже XV—XVI вв. в Европе x^4 могли записывать как *ce. ce. (censo de censo)*, x^5 — как β, x^6 — как $cub\ \tilde{q}\ d^{ti}$, а x^7 — как 2^0r^0 или $\overset{0}{\underset{2}{}}rel$. А выражение $\sqrt{14 + \sqrt{180}}$ было принято записывать как: $R_x\ \underline{.14\,.\bar{p}\,R_x\,.180.}$ При этом x был не индексом, а перечёркивал нижнюю часть наклонной черты в букве R; это было сокращение слова *Radix*, корень. Однако основные свойства степеней ($x^2x^3 = x^5$, $(x^2)^3 = x^6$, ... и т. п.) к тому времени использовались уже широко и устойчиво. Позже выпускались и специальные таблицы перевода одних наименований в другие.

В первой (1703) на русском языке «Арифметике» Л. Ф. Магницкого x^4 называется *зензизенсус*, а x^7 — *бисурдесолидус*. Универсальное обозначение a^n и его использование принадлежат (ок. 1640) Декарту, а распространение на отрицательные и рациональные степени — Ньютону (ок. 1686). Впрочем, вплоть до начала XIX в. вместо a^2, x^3 часто писали aa, xxx. Возникновение знаков $\sqrt{\ }$ и $\sqrt[n]{\ }$ связывают с «вытягиванием» вправо горизонтальной части буквы «r». Их последовательно стал применять французский математик Альбер Жирар (1595—1632), использовали Ньютон и немецкий философ и математик Готфрид Вильгельм Лейбниц (1646—1716), но окончательно они утвердились к середине XVIII в.

Ньютон нашёл разложение $(1 + x)^{\frac{m}{n}}$ в сумму бесконечного ряда по степеням переменной. Швейцарский математик Иоганн Бернулли (1667—1742) около 1700 г. вывел красивую формулу для определённого интеграла функции x^x. После работ Эйлера, к концу XVIII в., степенные выражения и функции стали изучать и для комплексных чисел. Извлечение корней n-й степени традиционно рассматривалось как операция, обратная возведению в n-ю степень. Вопрос о реализуемости такой операции как отдельная математическая проблема стал рассматриваться существенно позже, уже к концу XIX в., после построения (Дедекинд, Вейерштрасс, Кантор — см. главу 1 учебника для 10-го класса) теории действительных чисел. Например, во «Всеобщей арифметике» Эйлера (1768 г.) написано так: *«Так, например, 43 поелику число не кубичное, то ни въ цѣлыхъ, ни въ ломаных числахъ нет такого числа, котораго бы кубъ составлялъ точно 43»*, но далее обращаются с $\sqrt[3]{43}$ как с обычным числом, не слишком заботясь о существовании *«онаго»* числа.

Современная методика построения теории степенных функций и изучения их свойств сложилась в математическом анализе примерно к середине XX в.

Одна из первых версий основной теоремы алгебры была сформулирована Декартом в 1637 г. так: *«Итак, знайте, что всякое уравнение может иметь столько же различных корней (или же значений неизвестной величины), сколько последняя имеет измерений»*. История доказательства этой теоремы достаточно протяжённа, начиная от доказательств 1748 г. французского учёного-энциклопедиста Жана Даламбера (1717—1783) и 1751 г. Леонарда Эйлера (1707—1783) и заканчивая доказательствами немецкого математика Карла Фридриха Гаусса (1777—1855) в 1799 и в 1814 гг. Интересны названия этих работ Гаусса: *«Новое (Второе новое) доказательство теоремы о том, что всякая алгебраическая рациональная функция от одной переменной может быть разложена на действительные множители первой и второй степени»*. Значит, главная цель в доказательстве Гаусса — это именно теорема 4 (с. 87), а то, что мы теперь называем основной теоремой алгебры, — важное, но вспомогательное утверждение.

ГЛАВА 3 Показательная и логарифмическая функции

§ 11. Показательная функция, её свойства и график

Найдём значения выражения 2^x при некоторых рациональных значениях переменной x:

если $x = 2$, то $2^x = 2^2 = 4$;

если $x = 5$, то $2^x = 2^5 = 32$;

если $x = 0$, то $2^x = 2^0 = 1$;

если $x = -4$, то $2^x = 2^{-4} = \frac{1}{2^4} = \frac{1}{16}$;

если $x = \frac{4}{3}$, то $2^x = 2^{\frac{4}{3}} = \sqrt[3]{2^4} = 2\sqrt[3]{2}$;

если $x = -3{,}5$, то $2^x = 2^{-3,5} = \frac{1}{2^{3,5}} = \frac{1}{2^{\frac{7}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{2^7}} = \frac{1}{8\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{16}$.

Вообще, какое бы рациональное значение мы ни придали переменной x, всегда можно вычислить соответствующее числовое значение выражения 2^x. Таким образом, можно говорить о *показательной функции* $y = 2^x$, *определённой на множестве* Q *рациональных чисел*:

$$y = 2^x,\ x \in Q.$$

Рассмотрим некоторые свойства этой функции.

Свойство 1. $y = 2^x$, $x \in Q$ — возрастающая функция.

Доказательство осуществим в два этапа.

Первый этап. Докажем, что если r — положительное рациональное число, то $2^r > 1$.

Возможны два случая: 1) r — натуральное число, $r = n$; 2) r — обыкновенная несократимая дробь, $r = \frac{m}{n}$.

Если $r = n$, то очевидно, что $2^n > 1$.

Если $r = \frac{m}{n}$, то рассуждаем так:

$$2 > 1;$$

$$\sqrt[n]{2} > \sqrt[n]{1};$$

$$\left(\sqrt[n]{2}\right)^m > \left(\sqrt[n]{1}\right)^m.$$

В левой части последнего неравенства содержится $2^{\frac{m}{n}}$, а в правой — 1. Значит, последнее неравенство можно переписать в виде:

$$2^{\frac{m}{n}} > 1.$$

Итак, в любом случае из $r > 0$ следует $2^r > 1$, что и требовалось доказать.

Второй этап. Пусть x_1 и x_2 — рациональные числа, причём $x_1 < x_2$. Составим разность $2^{x_2} - 2^{x_1}$ и выполним некоторые её преобразования:

$$2^{x_2} - 2^{x_1} = 2^{x_1}(2^{x_2 - x_1} - 1) = 2^{x_1}(2^r - 1)$$

(мы обозначили разность $x_2 - x_1$ буквой r).

Так как r — положительное рациональное число, то по доказанному на первом этапе $2^r > 1$, т. е. $2^r - 1 > 0$. Число 2^{x_1} также положительно, значит, положительным является и произведение $2^{x_1}(2^r - 1)$. Тем самым мы доказали, что справедливо неравенство $2^{x_2} - 2^{x_1} > 0$.

Итак, из неравенства $x_1 < x_2$ следует, что $2^{x_1} < 2^{x_2}$, а это и означает, что функция $y = 2^x$ возрастающая.

Свойство 2. Функция $y = 2^x$, $x \in Q$, ограничена снизу и не ограничена сверху.

Ограниченность функции снизу следует из неравенства $2^x > 0$, справедливого для любых значений x из области определения функции. В то же время какое бы положительное число M ни взять, всегда можно подобрать такой показатель x, что будет выполняться неравенство $2^x > M$ — а это и характеризует неограниченность функции сверху.

Доказать это можно, например, так. Возьмём произвольное число $M > 0$. Рассмотрим его целую часть $[M]$ и составим число $P = M + 1$. Обозначим буквой n количество цифр этого числа. Тогда выполняется неравенство $P < 10^n$. Вычислим значение функции $y = 2^x$ в точке $x_0 = \frac{10n}{3}$. Имеем:

$$2^{x_0} = 2^{\frac{10n}{3}} = (\sqrt[3]{2^{10}})^n = (\sqrt[3]{1024})^n > (\sqrt[3]{1000})^n = 10^n > P > M.$$

Свойство 3. Функция $y = 2^x$, $x \in Q$, не имеет ни наименьшего, ни наибольшего значений.

То, что данная функция не имеет наибольшего значения, очевидно, поскольку она, как мы только что видели, не ограничена сверху. Но снизу она ограничена, почему же у неё нет наименьшего значения?

Предположим, что 2^r — наименьшее значение функции (r — некоторый рациональный показатель). Возьмём рациональное число $q < r$. Тогда в силу возрастания функции $y = 2^x$ будем иметь $2^q < 2^r$. А это значит, что 2^r не может служить наименьшим значением функции.

Всё это хорошо, скажете вы, но почему мы рассматриваем функцию $y = 2^x$ только на множестве рациональных чисел, почему мы не рассматриваем её, как другие известные функции, на всей числовой прямой или на каком-либо сплошном промежутке числовой прямой? Что нам мешает? Обдумаем ситуацию.

Числовая прямая содержит не только рациональные, но и иррациональные числа. Для изученных ранее функций это нас не смущало. Например, значения функции $y = x^2$ мы одинаково легко находили как при рациональных, так и при иррациональных значениях x: достаточно было заданное значение x возвести в квадрат.

А вот с функцией $y = 2^x$ дело обстоит сложнее. Если аргументу x придать рациональное значение, то в принципе 2^x вычислить можно (вернитесь ещё раз к началу параграфа, где мы именно это и делали). А если аргументу x придать иррациональное значение? Как, например, вычислить $2^{\sqrt{3}}$? Этого мы пока не знаем.

Математики нашли выход из положения; вот как они рассуждали.

Известно, что $\sqrt{3} = 1{,}7320508...$ Рассмотрим последовательность рациональных чисел — десятичных приближений числа $\sqrt{3}$ по недостатку:

1; 1,7; 1,73; 1,732; 1,7320; 1,73205; 1,732050; 1,7320508; ... .

Ясно, что $1{,}732 = 1{,}7320$, а $1{,}732050 = 1{,}73205$. Во избежание подобных повторов отбросим те члены последовательности, которые заканчиваются цифрой 0. Тогда получим возрастающую последовательность:

$$1;\ 1{,}7;\ 1{,}73;\ 1{,}732;\ 1{,}73205;\ 1{,}7320508;\ \ldots .$$

Соответственно возрастает и последовательность

$$2^1;\ 2^{1{,}7};\ 2^{1{,}73};\ 2^{1{,}732};\ 2^{1{,}73205};\ 2^{1{,}7320508},\ \ldots .$$

Все члены этой последовательности — положительные числа, меньшие чем 2^2, т. е. эта последовательность ограниченная. А по теореме Вейерштрасса (см. «Алгебра и начала математического анализа–10», § 38), если последовательность возрастает и ограничена, то она сходится. Если последовательность сходится, то только к одному пределу. Этот единственный предел договорились считать значением числового выражения $2^{\sqrt{3}}$. И неважно, что найти даже приближённое значение числового выражения $2^{\sqrt{3}}$ очень трудно, важно, что это конкретное число (в конце концов, мы же не боялись говорить, что, например, $x = \sqrt{17} - \sqrt{13}$ — корень рационального уравнения, а $x = \arccos\left(-\frac{2}{5}\right)$ — корень тригонометрического уравнения, не особенно задумываясь над тем, а что же это конкретно за числа: $\sqrt{17} - \sqrt{13}$ или $\arccos\left(-\frac{2}{5}\right)$).

Итак, мы выяснили, какой смысл вкладывают математики в символ $2^{\sqrt{3}}$. Аналогично можно определить, что такое $2^{\sqrt{5}}$, $2{,}5^{\pi}$ и вообще что такое a^{α}, где α — иррациональное число и $a > 1$.

Определение. Пусть $a > 1$ и $\alpha = a{,}a_1a_2a_3\,...a_n...$ — положительное иррациональное число (бесконечная десятичная непериодическая дробь). Составим последовательность десятичных приближений числа a по недостатку:

$$\alpha_1 = a{,}a_1,\ \alpha_2 = a{,}a_1a_2,\ \alpha_3 = a{,}a_1a_2a_3\,...,\ \alpha_n = a{,}a_1a_2a_3\ldots a_n, \ldots .$$

Тогда предел последовательности a^{α_1}, a^{α_2}, a^{α_3}, ..., a^{α_n}, ... обозначают a^{α} и называют **степенью с иррациональным показателем.** Если $\alpha < 0$, то под a^{α} понимают $\frac{1}{a^{-\alpha}}$.

Подчеркнём, что при $a > 1$ указанная в определении последовательность a^{α_1}, a^{α_2}, a^{α_3}, ..., a^{α_n}, ... возрастает и ограничена сверху, она сходится к пределу a^{α}, который является одной из верхних границ последовательности, т. е для любого n выполняется неравенство $a^{\alpha_n} < a^{\alpha}$.

А как быть в случае, когда $0 < a < 1$? Как вычислить, например, $\left(\frac{2}{3}\right)^{\pi}$? Самым естественным способом: считать, что $\left(\frac{2}{3}\right)^{\pi} = \left(\frac{3}{2}\right)^{-\pi}$, т. е. свести вычисления к случаю, когда основание степени больше 1.

Теперь мы можем говорить не только о степенях с произвольными рациональными показателями, но и *о степенях с произвольными действительными показателями*. Доказано, что степени с любыми действительными показателями обладают всеми привычными свойствами степеней: при умножении степеней с одинаковыми основаниями показатели складываются, при делении — вычитаются, при возведении степени в степень — перемножаются и т. д. Но самое главное, что теперь мы можем говорить о функции $y = a^x$, определённой на множестве всех действительных чисел.

Вернёмся к функции $y = 2^x$, построим её график. Для этого составим таблицу значений функции $y = 2^x$:

x	0	1	−1	2	−2	3	−3
y	1	2	$\frac{1}{2}$	4	$\frac{1}{4}$	8	$\frac{1}{8}$

Отметим точки (0; 1), (1; 2), $\left(-1; \frac{1}{2}\right)$, (2; 4), $\left(-2; \frac{1}{4}\right)$, (3; 8), $\left(-3; \frac{1}{8}\right)$ на координатной плоскости (рис. 41), они намечают некоторую линию, проведём её — это график функции $y = 2^x$ (рис. 42).

Свойства функции $y = 2^x$:

1) $D(f) = (-\infty; +\infty)$;
2) не является ни чётной, ни нечётной;
3) возрастает;
4) не ограничена сверху, ограничена снизу;
5) не имеет ни наибольшего, ни наименьшего значений;
6) непрерывна;
7) $E(f) = (0; +\infty)$;
8) выпукла вниз.

Строгие доказательства перечисленных свойств функции $y = 2^x$ приводят в курсе высшей математики. Часть этих свойств мы в той или иной мере обсудили ранее, часть из них наглядно демонстрирует построенный график (см. рис. 42). Например, отсутствие чётности или нечётности функции геометрически связано с отсутствием симметрии графика соответственно относительно оси y или относительно начала координат.

Покажем для примера, как можно доказать возрастание функции $y = 2^x$ при $x > 0$. Пусть $0 < x_1 < x_2$. Если оба числа — рациональные, то выше мы уже доказали, что в этом случае выполняется неравенство $2^{x_1} < 2^{x_2}$. Пусть x_1 — рациональное, а x_2 — иррациональное число: $x_2 = \alpha$. Рассмотрим последовательность

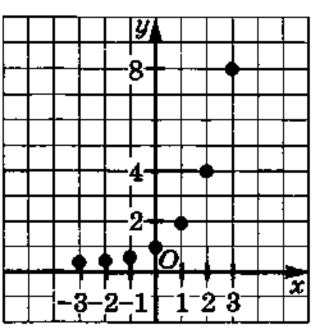


Рис. 41

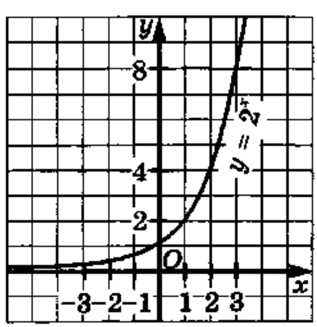


Рис. 42

десятичных приближений числа α по недостатку: $\alpha_1 = a{,}a_1$, $\alpha_2 = a{,}a_1a_2$, $\alpha_3 = a{,}a_1a_2a_3 \ldots$, $\alpha_n = a{,}a_1a_2a_3\ldots a_n$, $\ldots$. Поскольку $x_1 < \alpha$, найдётся α_n такое, что $x_1 < \alpha_n$. В последнем неравенстве обе части — рациональные числа, значит, $2^{x_1} < 2^{\alpha_n}$. Но $2^{\alpha_n} < 2^{\alpha}$, значит, $2^{x_1} < 2^{\alpha}$, т. е. $2^{x_1} < 2^{x_2}$.

Пусть $x_1 = \alpha$ — иррациональное, а x_2 — рациональное число. Пусть x_3 — рациональное число, заключённое между α и x_2, т. е. $\alpha < x_3 < x_2$. Рассмотрим последовательность десятичных приближений числа α по недостатку: $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n, \ldots$.

Для любого n выполняется неравенство $\alpha_n < x_3$; здесь обе части неравенства — рациональные числа, а потому $2^{\alpha_n} < 2^{x_3}$. В курсе математического анализа доказана такая теорема: если все члены сходящейся последовательности меньше некоторого числа, то предел последовательности не больше этого числа. Значит, $2^{\alpha} \leqslant 2^{x_3}$. Но $x_3 < x_2$, причём обе части неравенства — рациональные числа, значит, $2^{x_3} < 2^{x_2}$. В итоге получаем, что $2^{\alpha} < 2^{x_2}$, т. е. $2^{x_1} < 2^{x_2}$.

Если, наконец, и x_1 и x_2 — иррациональные числа, то выберем между ними рациональное число x_3. Тогда по доказанному выше выполняются неравенства $2^{x_1} < 2^{x_3}$ и $2^{x_3} < 2^{x_2}$. Значит, и в этом случае $2^{x_1} < 2^{x_2}$.

Точно такими же свойствами обладает любая функция вида $y = a^x$, где $a > 1$. На рис. 43 в одной системе координат построены графики функций $y = 2^x$, $y = 3^x$, $y = 5^x$.

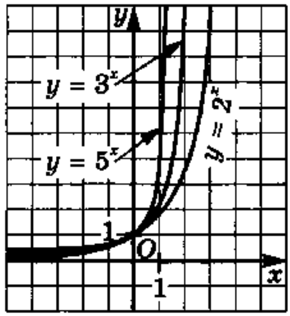


Рис. 43

Рассмотрим теперь функцию $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$, составим для неё таблицу значений:

x	0	−1	1	−2	2	−3	3
y	1	2	$\frac{1}{2}$	4	$\frac{1}{4}$	8	$\frac{1}{8}$

Отметим точки (0; 1), (−1; 2), $\left(1; \frac{1}{2}\right)$, (−2; 4), $\left(2; \frac{1}{4}\right)$, (−3; 8), $\left(3; \frac{1}{8}\right)$ на координатной плоскости (рис. 44). Они намечают некоторую линию, проведём её — это график функции $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ (рис. 45).

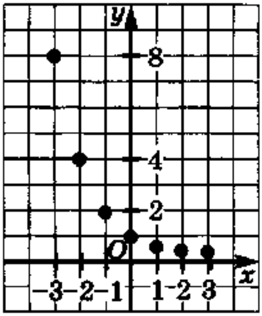


Рис. 44

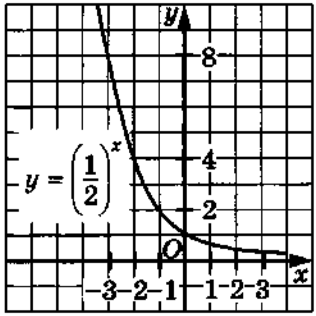


Рис. 45

Свойства функции $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$:

1) $D(f) = (-\infty; +\infty)$;
2) не является ни чётной, ни нечётной;
3) убывает;
4) не ограничена сверху, ограничена снизу;
5) не имеет ни наибольшего, ни наименьшего значений;
6) непрерывна;
7) $E(f) = (0; +\infty)$;
8) выпукла вниз.

Точно такими же свойствами обладает любая функция вида $y = a^x$, где $0 < a < 1$. На рис. 46 в одной системе координат построены графики функций $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ и $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$.

Обратите внимание: графики функций $y = 2^x$ и $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$, т. е. $y = 2^{-x}$, симметричны относительно оси y (рис. 47). Это следствие известного утверждения: *графики функций $y = f(x)$ и $y = f(-x)$ симметричны относительно оси y*. Аналогично будут симметрич-

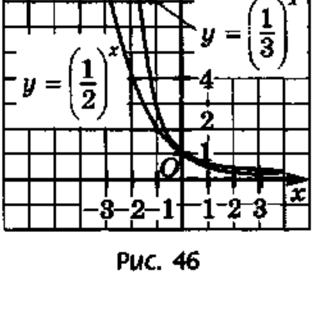


Рис. 46

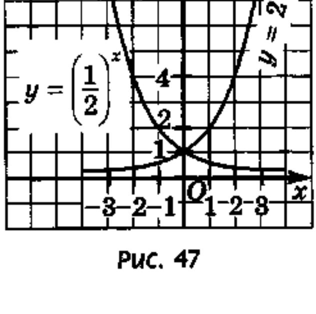


Рис. 47

ны относительно оси y графики функций $y = 3^x$ и $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$, $y = 5^x$ и $y = \left(\frac{1}{5}\right)^x$, $y = \left(\frac{2}{7}\right)^x$ и $y = \left(\frac{7}{2}\right)^x$ и т. д.

Подводя итог сказанному, дадим определение показательной функции и выделим наиболее важные её свойства.

Определение. Функцию вида $y = a^x$, где $a > 0$, $a \neq 1$, называют **показательной функцией.**

Основные свойства показательной функции $y = a^x$:

№ п/п	$a > 1$	$0 < a < 1$
1	$D(f) = (-\infty; +\infty)$	$D(f) = (-\infty; +\infty)$
2	$E(f) = (0; +\infty)$	$E(f) = (0; +\infty)$
3	Возрастает	Убывает
4	Непрерывна	Непрерывна

График функции $y = a^x$ для $a > 1$ изображён на рис. 48, а для $0 < a < 1$ — на рис. 49.

Кривую, изображённую на рис. 48 или 49, называют *экспонентой* (впрочем, экспонентой обычно называют и саму показательную функцию $y = a^x$).

Обратите внимание на геометрическую особенность графика показательной функции $y = a^x$: *ось x является горизонтальной асимптотой графика*. Правда, обычно это утверждение уточняют следующим образом: ось x является горизонтальной асимптотой графика функции $y = a^x$ при $x \to -\infty$, если $a > 1$ (см. рис. 48), и при $x \to +\infty$, если $0 < a < 1$ (см. рис. 49).

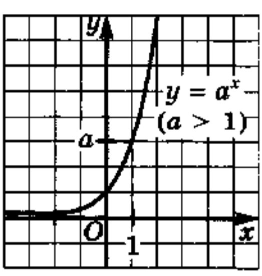


Рис. 48

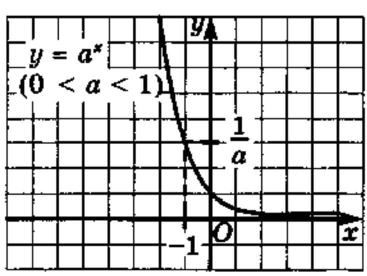


Рис. 49

Иными словами (см. «Алгебра и начала математического анализа–10», § 39),

$$\text{если } a > 1, \text{ то } \lim_{x \to -\infty} a^x = 0;$$

$$\text{если } 0 < a < 1, \text{ то } \lim_{x \to +\infty} a^x = 0.$$

Первое важное замечание. Школьники часто путают термины: степенная функция, показательная функция. Сравните: $y = x^2$, $y = x^3$, $y = x^{\frac{1}{2}}$, $y = x^{-2,5}$ — это примеры степенных функций; $y = 2^x$, $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$, $y = (2,5)^x$ — это примеры показательных функций. Вообще $y = x^r$, где r — конкретное число, — *степенная функция* (аргумент x содержится в основании степени); $y = a^x$, где a — конкретное число (положительное и отличное от 1), — *показательная функция* (аргумент x содержится в показателе степени).

А такую «экзотическую» функцию, как $y = x^x$, не считают ни показательной, ни степенной (её иногда называют показательно-степенной).

Второе важное замечание. Обычно не рассматривают показательную функцию с основанием $a = 1$ или с основанием a, удовлетворяющим неравенству $a \leqslant 0$, показательная функция $y = a^x$ при $a = 1$ «вырождается» в постоянную функцию $y = 1$ — это неинтересно. Если $a = 0$, то $0^x = 0$ для любого положительного значения x, т. е. мы получаем функцию $y = 0$, определённую при $x > 0$, — это тоже неинтересно. Если, наконец, $a < 0$, то выражение a^x имеет смысл лишь при целых значениях x, а мы всё-таки предпочитаем рассматривать функции, определённые на сплошных промежутках.

Встречаются ли показательные функции как математические модели реальных ситуаций, заданные на всей числовой прямой или на каком-либо числовом промежутке? Безусловно, и очень часто. Например, из физики известен закон радиоактивного распада вещества: $m = m_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}}$; здесь m_0 — первоначальная масса вещества, m — масса вещества в рассматриваемый момент времени t, T — некоторое положительное число (константа), своё для каждого вида радиоактивного вещества (это число обычно называют *периодом полураспада*). Как видите, указанный закон связан с показательной функцией, причём областью определения этой функции является множество всех неотрицательных чисел (аргумент t может принимать любые неотрицательные значения). С показательными функциями связаны многие экономические и биологические законы, физические законы, относящиеся, например, к изменению температуры тела, и т. д.

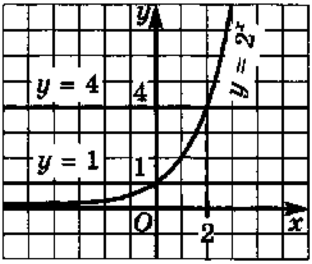


Рис. 50

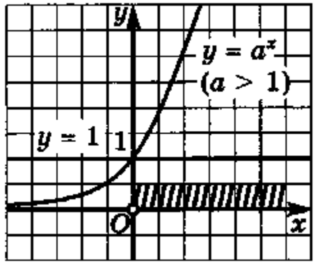


Рис. 51

Пример 1. Решить уравнения и неравенства:

а) $2^x = 1$; в) $2^x = 8$; д) $2^x > 1$;

б) $2^x = 4$; г) $2^x = \frac{1}{16}$; е) $2^x < 4$.

Решение. Воспользуемся тем, что функция $y = 2^x$ монотонна (возрастает), а потому из равенства $2^x = 2^\alpha$ следует равенство $x = \alpha$.

а) Из уравнения $2^x = 2^0$ получаем: $x = 0$.

б) Из уравнения $2^x = 2^2$ получаем: $x = 2$.

в) Из уравнения $2^x = 2^3$ получаем: $x = 3$.

г) Из уравнения $2^x = 2^{-4}$ получаем: $x = -4$.

д) График функции $y = 2^x$ расположен выше графика функции $y = 1$ при $x > 0$ — это хорошо читается по рис. 50. Значит, решением неравенства $2^x > 1$ служит промежуток $(0; +\infty)$.

е) График функции $y = 2^x$ расположен ниже графика функции $y = 4$ при $x < 2$ — это хорошо читается по рис. 50. Значит, решением неравенства $2^x < 4$ служит промежуток $(-\infty; 2)$. ■

В основе всех выводов, сделанных при решении примера 1, лежало свойство монотонности (возрастания) функции $y = 2^x$. Аналогичные рассуждения позволяют убедиться в справедливости следующих двух теорем.

Теорема 1. ***Если $a > 1$, то равенство $a^t = a^s$ справедливо тогда и только тогда, когда $t = s$.***

Теорема 2. ***Если $a > 1$, то неравенство $a^x > 1$ справедливо тогда и только тогда, когда $x > 0$*** (рис. 51); ***неравенство $a^x < 1$ справедливо тогда и только тогда, когда $x < 0$.***

Пример 2. Решить уравнения и неравенства:

а) $\left(\frac{1}{3}\right)^x = 1$; в) $\left(\frac{1}{3}\right)^x = 9$; д) $\left(\frac{1}{3}\right)^x > 1$;

б) $\left(\frac{1}{3}\right)^x = 3$; г) $\left(\frac{1}{3}\right)^x = \frac{1}{9}$; е) $\left(\frac{1}{3}\right)^x < 3$.

Р е ш е н и е. Воспользуемся тем, что функция $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ монотонна (убывает), а потому из равенства $\left(\frac{1}{3}\right)^x = \left(\frac{1}{3}\right)^\alpha$ следует равенство $x = \alpha$.

а) Из уравнения $\left(\frac{1}{3}\right)^x = \left(\frac{1}{3}\right)^0$ получаем: $x = 0$.

б) Из уравнения $\left(\frac{1}{3}\right)^x = \left(\frac{1}{3}\right)^{-1}$ получаем: $x = -1$.

в) Из уравнения $\left(\frac{1}{3}\right)^x = \left(\frac{1}{3}\right)^{-2}$ получаем: $x = -2$.

г) Из уравнения $\left(\frac{1}{3}\right)^x = \left(\frac{1}{3}\right)^2$ получаем: $x = 2$.

д) График функции $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ расположен выше графика функции $y = 1$ при $x < 0$ — это хорошо читается по рис. 52. Значит, решением неравенства $\left(\frac{1}{3}\right)^x > 1$ служит промежуток $(-\infty; 0)$.

е) График функции $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ расположен ниже графика функции $y = 3$ при $x > -1$ — это хорошо читается по рис. 52. Значит, решением неравенства $\left(\frac{1}{3}\right)^x < 3$ служит промежуток $(-1; +\infty)$. ■

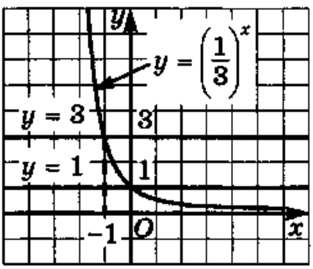


Рис. 52

В основе всех выводов, сделанных при решении примера 2, лежало свойство монотонности (убывания) функции $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$. Аналогичные рассуждения позволяют убедиться в справедливости следующих двух теорем.

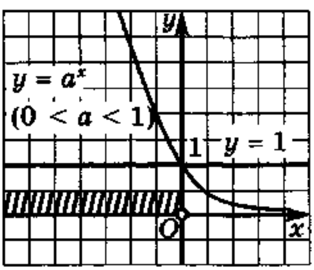


Рис. 53

Теорема 3. ***Если*** $0 < a < 1$, ***то равенство*** $a^t = a^s$ ***справедливо тогда и только тогда, когда*** $t = s$.

Теорема 4. ***Если*** $0 < a < 1$, ***то неравенство*** $a^x > 1$ ***справедливо тогда и только тогда, когда*** $x < 0$ (рис. 53); ***неравенство*** $a^x < 1$ ***справедливо тогда и только тогда, когда*** $x > 0$.

Пример 3. Построить график функции $y = 3 \cdot 3^x + 2$ и найти наибольшее и наименьшее значения этой функции на отрезке $[-2; 2]$.

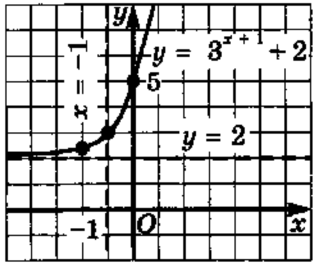


Рис. 54

Решение. Можно действовать так: построить график функции $y = 3^x$, затем осуществить его растяжение от оси x с коэффициентом 3, а затем полученный график поднять вверх на 2 единицы масштаба. Но удобнее воспользоваться тем, что $3 \cdot 3^x = 3^{x+1}$, и, следовательно, строить график функции $y = 3^{x+1} + 2$.

Перейдём, как неоднократно уже делали в подобных случаях, к вспомогательной системе координат с началом в точке $(-1; 2)$ — пунктирные прямые $x = -1$ и $y = 2$ на рис. 54. «Привяжем» функцию $y = 3^x$ к новой системе координат. Для этого выберем контрольные точки для функции $y = 3^x$: $(0; 1)$, $(1; 3)$, $\left(-1; \frac{1}{3}\right)$, — но строить их будем не в старой, а в новой системе координат (эти точки отмечены на рис. 54). Затем по точкам построим экспоненту — это и будет требуемый график (см. рис. 54).

Чтобы найти наибольшее и наименьшее значения заданной функции на отрезке $[-2; 2]$, воспользуемся тем, что заданная функция возрастает, а потому свои наименьшее и наибольшее значения она принимает соответственно в левом и правом концах отрезка.

Итак,

$$y_{\text{наим}} = f(-2) = 3^{-2+1} + 2 = 2\frac{1}{3};$$

$$y_{\text{наиб}} = f(2) = 3^{2+1} + 2 = 29.$$ ■

Пример 4. Решить уравнение и неравенства:

а) $5^x = 6 - x$; б) $5^x \geqslant 6 - x$; в) $5^x < 6 - x$.

Решение. а) Построим в одной системе координат графики функций $y = 5^x$ и $y = 6 - x$ (рис. 55). Они пересекаются в одной точке; судя по чертежу, это точка $(1; 5)$. Проверка показывает, что на самом деле точка $(1; 5)$ удовлетворяет и уравнению $y = 5^x$, и уравнению $y = 6 - x$. Абсцисса этой точки служит единственным корнем заданного уравнения, поскольку $y = 5^x$ — возрастающая функция, а $y = 6 - x$ — убывающая функция.

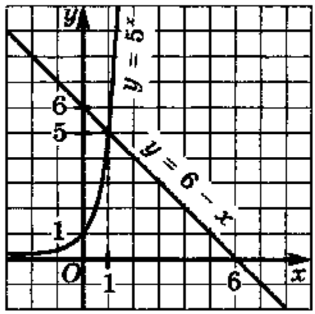


Рис. 55

Итак, уравнение $5^x = 6 - x$ имеет единственный корень $x = 1$.

б) и в) Экспонента $y = 5^x$ находится выше прямой $y = 6 - x$, если $x > 1$. Это хорошо видно на рис. 55. Значит, решение неравенства $5^x \geqslant 6 - x$ можно записать так: $x \geqslant 1$. А решение неравенства $5^x < 6 - x$ можно записать так: $x < 1$.

Ответ: а) $x = 1$; б) $x \geqslant 1$; в) $x < 1$.

Пример 5. Дана функция $y = f(x)$, где $f(x) = 10^x$. Доказать, что $f(\sin^2 x)\cdot f(\cos^2 x) = 10$.

Решение. По условию $f(x) = 10^x$.

Значит, $f(\sin^2 x) = 10^{\sin^2 x}$, а $f(\cos^2 x) = 10^{\cos^2 x}$. Имеем:

$$f(\sin^2 x)\cdot f(\cos^2 x) = 10^{\sin^2 x} \cdot 10^{\cos^2 x} = 10^{\sin^2 x + \cos^2 x}.$$

Но $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$. Значит, $10^{\sin^2 x + \cos^2 x} = 10^1 = 10$.
Итак, $f(\sin^2 x)\cdot f(\cos^2 x) = 10$, что и требовалось доказать. ■

Пример 6. Решить уравнение $\left(\frac{2}{7}\right)^x + \frac{12}{7} = 2^x$.

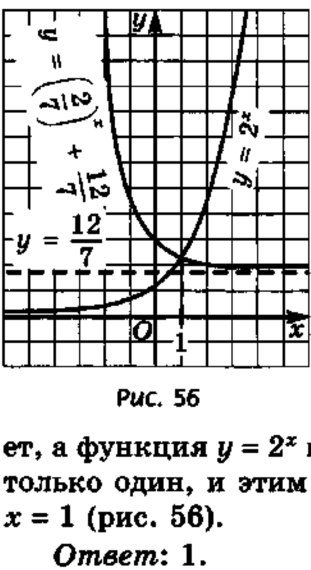


Рис. 56

Решение. Снова воспользуемся тем, что если функция $y = f(x)$ убывает, а функция $y = g(x)$ возрастает и если уравнение $f(x) = g(x)$ имеет корень, то только один. Нетрудно догадаться, что заданное уравнение имеет корень $x = 1$: подставив значение $x = 1$ в заданное уравнение, получим $\left(\frac{2}{7}\right)^1 + \frac{12}{7} = 2^1$ — верное числовое равенство.

Так как функция $y = \left(\frac{2}{7}\right)^x + \frac{12}{7}$ убывает, а функция $y = 2^x$ возрастает, то корень у заданного уравнения только один, и этим корнем является найденное выше значение $x = 1$ (рис. 56).

Ответ: 1.

Вопросы для самопроверки

1. Объясните, какой смысл придаётся в математике символу a^α, где α — иррациональное число. Рассмотрите каждый из указанных ниже случаев:

а) $a > 1$; б) $0 < a < 1$; в) $a = 1$; г) $a = 0$; д) $a < 0$.

2. Что такое показательная функция?

3. Чему равен $\lim\limits_{x \to -\infty} a^x$, если $a > 1$?

4. Чему равен $\lim\limits_{x \to +\infty} a^x$, если $0 < a < 1$?

5. В каком случае показательная функция $y = a^x$ возрастает, а в каком — убывает?

6. В каком случае график показательной функции $y = a^x$ имеет горизонтальную асимптоту при $x \to +\infty$, а в каком — при $x \to -\infty$?

7. Напишите уравнение асимптоты для графика функции:

а) $y = 2^x$; г) $y = \left(\frac{2}{3}\right)^x - 1$;

б) $y = (0{,}3)^x$; д) $y = 4{,}3^{x-3}$;

в) $y = 3^x + 2$; е) $y = 0{,}5^{x+7}$.

8. Найдите наибольшее значение функции $y = \begin{cases} 2^x, & x \leqslant 0, \\ 1 - x, & x > 0. \end{cases}$

§ 12. Показательные уравнения

Показательными уравнениями называют уравнения вида

$$a^{f(x)} = a^{g(x)}, \qquad (1)$$

где a — положительное число, отличное от 1, и уравнения, сводящиеся к этому виду.

Опираясь на полученные в предыдущем параграфе теоремы 1 и 3, согласно которым равенство $a^t = a^s$, где $a > 0$, $a \neq 1$, справедливо тогда и только тогда, когда $t = s$, мы можем сформулировать следующее утверждение.

Теорема. ***Показательное уравнение $a^{f(x)} = a^{g(x)}$ (где $a > 0$, $a \neq 1$) равносильно уравнению $f(x) = g(x)$.***

Пример 1. Решить уравнения:

а) $2^{2x-4} = 64$; б) $\left(\frac{1}{3}\right)^{2x-3,5} = \frac{1}{\sqrt{3}}$; в) $5^{x^2-3x} = 5^{3x-8}$.

Решение. а) Представив 64 как 2^6, перепишем заданное уравнение в виде $2^{2x-4} = 2^6$. Это уравнение равносильно уравнению $2x - 4 = 6$, откуда находим: $x = 5$.

б) Представив $\frac{1}{\sqrt{3}}$ как $\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{2}}$, перепишем заданное уравнение в виде $\left(\frac{1}{3}\right)^{2x-3,5} = \left(\frac{1}{3}\right)^{0,5}$. Это уравнение равносильно уравнению $2x - 3{,}5 = 0{,}5$, откуда находим: $x = 2$.

в) Заданное уравнение равносильно уравнению

$$x^2 - 3x = 3x - 8.$$

Далее имеем:

$$x^2 - 6x + 8 = 0;$$
$$x_1 = 2, \; x_2 = 4. \qquad \blacksquare$$

Пример 2. Решить уравнение $\dfrac{0,2^{x-0,5}}{\sqrt{5}} = 5 \cdot 0,04^{x-2}$.

Решение. Здесь есть возможность и левую и правую части уравнения представить в виде степени с основанием 5. В самом деле,

$$0,2^{x-0,5} = \left(\frac{1}{5}\right)^{x-0,5} = (5^{-1})^{x-0,5} = 5^{0,5-x};$$
$$\sqrt{5} = 5^{\frac{1}{2}} = 5^{0,5};$$
$$5^{0,5-x} : 5^{0,5} = 5^{0,5-x-0,5} = 5^{-x};$$
$$5 \cdot 0,04^{x-2} = 5 \cdot \left(\frac{1}{25}\right)^{x-2} = 5 \cdot (5^{-2})^{x-2} = 5 \cdot 5^{-2x+4} = 5^{1-2x+4} = 5^{5-2x}.$$

Таким образом, заданное уравнение мы преобразовали к виду

$$5^{-x} = 5^{5-2x}.$$

Значит, $-x = 5 - 2x$ и, следовательно, $x = 5$. $\blacksquare$

Пример 3. Решить уравнение $4^x + 2^{x+1} - 24 = 0$.

Решение. Заметив, что $4^x = (2^2)^x = 2^{2x} = (2^x)^2$, а $2^{x+1} = 2 \cdot 2^x$, перепишем заданное уравнение в виде

$$(2^x)^2 + 2 \cdot 2^x - 24 = 0.$$

Есть смысл ввести новую переменную $y = 2^x$; тогда уравнение примет вид $y^2 + 2y - 24 = 0$. Решив квадратное уравнение относительно y, находим: $y_1 = 4$, $y_2 = -6$. Но $y = 2^x$, значит, нам остаётся решить два уравнения:

$$2^x = 4; \quad 2^x = -6.$$

Из первого уравнения находим $x = 2$, а второе уравнение не имеет корней, поскольку при любых значениях x выполняется неравенство $2^x > 0$.

Ответ: 2.

Подведём некоторые итоги. Можно выделить *три основных метода решения показательных уравнений.*

1) **Функционально-графический метод.** Он основан на использовании графических иллюстраций или каких-либо свойств функций. Мы применяли этот метод в § 11.

2) Метод уравнивания показателей. Он основан на теореме о том, что уравнение $a^{f(x)} = a^{g(x)}$ равносильно уравнению

$f(x) = g(x)$, где a — положительное число, отличное от 1. Мы применили этот метод в примерах 1 и 2.

3) Метод введения новой переменной. Мы применили этот метод в примере 3.

Рассмотрим несколько более сложных примеров.

Пример 4. Решить уравнение $2^{2x + 2\sqrt{x^2-2}} - 5 \cdot 2^{x + \sqrt{x^2-2} - 1} = 6$.

Решение. Преобразуем заданное уравнение к виду

$$2^{2(x + \sqrt{x^2-2})} - \frac{5}{2} \cdot 2^{x + \sqrt{x^2-2}} = 6.$$

Введём новую переменную $y = 2^{x + \sqrt{x^2-2}}$. Тогда уравнение примет вид

$$y^2 - \frac{5}{2}y - 6 = 0,$$

откуда находим: $y_1 = 4$, $y_2 = -\frac{3}{2}$. Теперь задача сводится к решению совокупности двух уравнений: $2^{x + \sqrt{x^2-2}} = 4$; $2^{x + \sqrt{x^2-2}} = -\frac{3}{2}$.

Второе уравнение не имеет корней, а из первого получаем:

$$x + \sqrt{x^2 - 2} = 2; \quad \sqrt{x^2 - 2} = 2 - x; \quad x^2 - 2 = (2 - x)^2; \quad x = \frac{3}{2}.$$

Поскольку при решении иррационального уравнения $\sqrt{x^2 - 2} = 2 - x$ пришлось возводить обе его части в квадрат, могли появиться посторонние корни, а значит, обязательна проверка. Подставив найденное значение $x = 1{,}5$ в уравнение $\sqrt{x^2 - 2} = 2 - x$, получим $\sqrt{1{,}5^2 - 2} = 2 - 1{,}5$, т. е. $\sqrt{0{,}25} = 0{,}5$ — верное равенство. Значит, $x = 1{,}5$ — корень иррационального, а вместе с тем и исходного уравнения.

Ответ: 1,5.

Пример 5. Решить уравнение $\sqrt[x]{64} - \sqrt[x]{2^{3x+3}} + 12 = 0$.

Решение. Сразу заметим, что, поскольку x — показатель корня, x может принимать только натуральные значения, начиная с числа 2. Значит, речь идёт об отыскании натуральных корней уравнения.

Преобразуем уравнение к виду $2^{\frac{6}{x}} - 2^{\frac{3x+3}{x}} + 12 = 0$ и далее:

$$2^{\frac{6}{x}} - 2^{3 + \frac{3}{x}} + 12 = 0;$$

$$2^{\frac{6}{x}} - 8 \cdot 2^{\frac{3}{x}} + 12 = 0.$$

Введём новую переменную $y = 2^{\frac{3}{x}}$. Тогда уравнение примет вид $y^2 - 8y + 12 = 0$, откуда находим: $y_1 = 6$, $y_2 = 2$. Теперь задача сводится к решению совокупности двух уравнений: $2^{\frac{3}{x}} = 6$; $2^{\frac{3}{x}} = 2$. Первое уравнение не имеет натуральных корней (т. е. никакое натуральное число не удовлетворяет этому уравнению), а из второго получаем $\frac{3}{x} = 1$, т. е. $x = 3$. ■

Пример 6. Решить уравнение $9 \cdot 27^{x - \frac{2}{3}} - \frac{2}{81} \cdot 9^{x+2} = 9$.

Решение. Выполним некоторые преобразования уравнения:

$$9 \cdot \frac{27^x}{27^{\frac{2}{3}}} - \frac{2}{81} \cdot 9^x \cdot 9^2 - 9 = 0;$$

$$3^{3x} - 2 \cdot 3^{2x} - 9 = 0.$$

Введём новую переменную $y = 3^x$, тогда уравнение примет вид

$$y^3 - 2y^2 - 9 = 0.$$

Разложим левую часть последнего уравнения на множители:

$$y^3 - 2y^2 - 9 = (y^3 - 3y^2) + (y^2 - 9) = y^2(y - 3) + (y + 3)(y - 3) =$$
$$= (y - 3)(y^2 + y + 3).$$

Значит, уравнение можно переписать в виде $(y - 3)(y^2 + y + 3) = 0$, откуда получаем, что либо $y = 3$, либо $y^2 + y + 3 = 0$. Последнее уравнение не имеет действительных корней.

Осталось решить уравнение $3^x = 3$, откуда находим: $x = 1$. ■

Пример 7. Решить уравнение $5^{2x+1} - 13 \cdot 15^x + 54 \cdot 9^{x-1} = 0$.

Решение. Воспользуемся тем, что

$$5^{2x+1} = 5 \cdot 5^{2x};$$

$$15^x = 5^x \cdot 3^x;$$

$$54 \cdot 9^{x-1} = 54 \cdot \frac{9^x}{9} = 6 \cdot 9^x = 6 \cdot 3^{2x}.$$

Это позволяет переписать заданное уравнение в более удобном виде:

$$5 \cdot 5^{2x} - 13 \cdot 5^x \cdot 3^x + 6 \cdot 3^{2x} = 0.$$

Разделив обе части уравнения почленно на 3^{2x}, получим равносильное ему уравнение:

$$5 \cdot \left(\frac{5}{3}\right)^{2x} - 13 \cdot \left(\frac{5}{3}\right)^{x} + 6 = 0. \qquad (2)$$

Мы воспользовались тем, что $\frac{5^{2x}}{3^{2x}} = \left(\frac{5}{3}\right)^{2x}$, и тем, что $\frac{5^x \cdot 3^x}{3^{2x}} = \frac{5^x}{3^x} = \left(\frac{5}{3}\right)^{x}$.

Теперь, как видите, «проявилась» новая переменная $y = \left(\frac{5}{3}\right)^{x}$, относительно которой уравнение (2) имеет вид квадратного уравнения:

$$5y^2 - 13y + 6 = 0.$$

Корнями этого уравнения служат числа $y_1 = \frac{3}{5}$, $y_2 = 2$. Значит, нам остаётся решить два уравнения:

$$\left(\frac{5}{3}\right)^{x} = \frac{3}{5}; \quad \left(\frac{5}{3}\right)^{x} = 2.$$

С первым из этих уравнений проблем нет:

$$\left(\frac{5}{3}\right)^{x} = \left(\frac{5}{3}\right)^{-1};$$

$$x = -1.$$

Со вторым уравнением у нас возникает проблема: как представить число 2 в виде некоторой степени числа $\frac{5}{3}$, мы пока не знаем. Между тем второе уравнение тоже имеет единственный корень — это хорошо видно из графической иллюстрации, представленной на рис. 57. Придётся нам в дальнейшем ещё раз вернуться к этому уравнению.

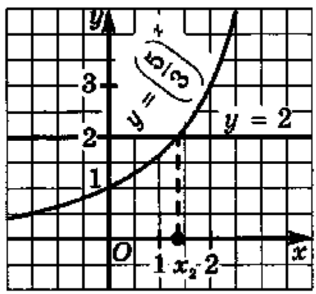


Рис. 57

Ответ: $x_1 = -1$, x_2 — корень уравнения $\left(\frac{5}{3}\right)^{x} = 2$.

Пример 8. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 2 \cdot (\sqrt{2})^{x+y} = 16^{3x-y}, \\ 9^{x+y} - 3^{x+y} = 72. \end{cases}$$

Решение. 1) Преобразуем первое уравнение системы к более простому виду:

$$2 \cdot (\sqrt{2})^{x+y} = 16^{3x-y};$$

$$2 \cdot 2^{\frac{1}{2}(x+y)} = 2^{4(3x-y)};$$

$$2^{1+\frac{x+y}{2}} = 2^{12x-4y};$$

$$1 + \frac{x+y}{2} = 12x - 4y;$$

$$23x - 9y = 2.$$

2) Преобразуем второе уравнение системы к более простому виду. Введём новую переменную $z = 3^{x+y}$. Тогда второе уравнение системы примет вид $z^2 - z = 72$, откуда находим: $z_1 = 9$, $z_2 = -8$.

Из уравнения $3^{x+y} = 9$ следует, что $x + y = 2$; уравнение $3^{x+y} = -8$ не имеет решений.

Итак, второе уравнение системы нам удалось преобразовать к виду

$$x + y = 2.$$

3) Решив полученную систему уравнений

$$\begin{cases} 23x - 9y = 2, \\ x + y = 2, \end{cases}$$

находим: $x = \frac{5}{8}$, $y = \frac{11}{8}$.

Ответ: $\left(\frac{5}{8}; \frac{11}{8}\right)$.

Вопросы для самопроверки

1. Верно ли, что уравнение $3^{2x-4} = 9^{x^2}$ равносильно уравнению $x - 2 = x^2$? Обоснуйте свой ответ.

2. Перечислите основные методы решения показательных уравнений.

3. Сколько корней имеет уравнение $3^x = 5 - x$? уравнение $3^x = 4 - x$? Какое из этих уравнений вы можете решить устно?

§ 13. Показательные неравенства

Показательными неравенствами называют неравенства вида

$$a^{f(x)} > a^{g(x)}, \qquad (1)$$

где a — положительное число, отличное от 1, и неравенства, сводящиеся к этому виду.

Для решения неравенства (1) проведём следующие рассуждения. Разделив обе части неравенства (1) на выражение $a^{g(x)}$, получим неравенство $\frac{a^{f(x)}}{a^{g(x)}} > 1$, равносильное неравенству (1) (поскольку обе части неравенства (1) мы разделили на выражение, положительное при любых значениях x). Далее имеем:

$$a^{f(x)-g(x)} > 1, \text{ т. е. } a^t > 1, \text{ где } t = f(x) - g(x).$$

Теперь следует рассмотреть два случая: $a > 1$ и $0 < a < 1$.

Если $a > 1$, то неравенство $a^t > 1$ имеет место тогда и только тогда, когда $t > 0$ (см. теорему 2 из § 11). Значит, $f(x) - g(x) > 0$, т. е. $f(x) > g(x)$.

Если $0 < a < 1$, то неравенство $a^t > 1$ имеет место тогда и только тогда, когда $t < 0$ (см. теорему 4 из § 11). Значит, $f(x) - g(x) < 0$, т. е. $f(x) < g(x)$.

Тем самым доказано следующее утверждение.

Теорема. ***Показательное неравенство $a^{f(x)} > a^{g(x)}$ равносильно неравенству того же смысла $f(x) > g(x)$, если $a > 1$;***

показательное неравенство $a^{f(x)} > a^{g(x)}$ равносильно неравенству противоположного смысла $f(x) < g(x)$, если $0 < a < 1$.

Пример 1. Решить неравенства:

а) $2^{2x-4} > 64$; б) $\left(\frac{1}{3}\right)^{2x-3,5} < \frac{1}{\sqrt{3}}$; в) $0,5^{x^2-3x} \leqslant 0,5^{3x-8}$.

Решение. а) Имеем $2^{2x-4} > 2^6$. Это неравенство равносильно неравенству того же смысла $2x - 4 > 6$, откуда следует, что $x > 5$.

б) Воспользовавшись тем, что $\frac{1}{\sqrt{3}} = \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{2}}$, перепишем заданное неравенство в виде $\left(\frac{1}{3}\right)^{2x-3,5} < \left(\frac{1}{3}\right)^{0,5}$. Здесь основанием служит число $\frac{1}{3} < 1$. Значит, рассматриваемое неравенство равносильно неравенству противоположного смысла $2x - 3,5 > 0,5$, откуда следует, что $x > 2$.

в) Заданное неравенство равносильно неравенству противоположного смысла $x^2 - 3x \geqslant 3x - 8$, т. е. $x^2 - 6x + 8 \geqslant 0$. Найдём корни квадратного трёхчлена $x^2 - 6x + 8$:

$$x_1 = 2, x_2 = 4.$$

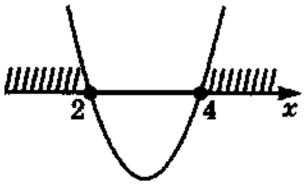


Рис. 58

Построив (схематически) параболу $y = x^2 - 6x + 8$, находим решение неравенства $x^2 - 6x + 8 \geqslant 0$ (рис. 58):

$$x \leqslant 2,\ x \geqslant 4.$$ ■

Пример 2. Решить неравенство

$$\frac{4 \cdot 3^x - 10}{3^{x+1} - 1} < 1.$$

Решение. Заметим, что $3^{x+1} = 3 \cdot 3^x$, и введём новую переменную $y = 3^x$. Получим: $\dfrac{4y - 10}{3y - 1} < 1.$

Далее последовательно получаем:

$$\frac{4y - 10}{3y - 1} - 1 < 0; \quad \frac{y - 9}{3y - 1} < 0; \quad \frac{y - 9}{3\left(y - \frac{1}{3}\right)} < 0.$$

Рис. 59

Применив для решения последнего неравенства метод интервалов (рис. 59), находим: $\dfrac{1}{3} < y < 9.$

Возвращаясь к переменной x, получим:

$$\frac{1}{3} < 3^x < 9;\ 3^{-1} < 3^x < 3^2;\ -1 < x < 2.$$

Ответ: $-1 < x < 2$.

Пример 3. Решить неравенство $4(9^x - 3^x) > \dfrac{5}{3^{x-2}} + 3^{x+1}.$

Решение. Имеем:

$$4(3^{2x} - 3^x) > \frac{5 \cdot 3^2}{3^x} + 3 \cdot 3^x;$$

$$4 \cdot 3^{2x} - 4 \cdot 3^x > \frac{45}{3^x} + 3 \cdot 3^x.$$

Введя новую переменную $y = 3^x$, перепишем неравенство в виде:

$$4y^2 - 4y > \frac{45}{y} + 3y;$$

$$\frac{4y^3 - 7y^2 - 45}{y} > 0.$$

Разложим числитель алгебраической дроби на множители:

$$4y^3 - 7y^2 - 45 = (4y^3 - 12y^2) + (5y^2 - 45) =$$
$$= 4y^2(y - 3) + 5(y + 3)(y - 3) = (y - 3)(4y^2 + 5y + 15).$$

Теперь интересующее нас неравенство можно переписать так:

$$\frac{(y-3)(4y^2+5y+15)}{y} > 0.$$

Поскольку $y = 3^x$, т. е. $y > 0$, выражение $\frac{4y^2+5y+15}{y}$ положительно и на него можно разделить обе части последнего неравенства. Получим $y - 3 > 0$, т. е. $y > 3$.

Осталось решить неравенство $3^x > 3$, откуда находим: $x > 1$ — решение заданного неравенства. ■

Пример 4. Решить неравенство $8^x + 18^x > 2 \cdot 27^x$.

Решение. Преобразуем неравенство к виду $2^{3x} + 2^x \cdot 3^{2x} > 2 \cdot 3^{3x}$ и разделим обе его части почленно на 3^{3x}:

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{3x} + \left(\frac{2}{3}\right)^{x} > 2.$$

Введя новую переменную $y = \left(\frac{2}{3}\right)^{x}$, перепишем неравенство в виде $y^3 + y - 2 > 0$.

Разложим левую часть неравенства на множители:

$$y^3 + y - 2 = (y^3 - 1) + (y - 1) = (y-1)(y^2+y+1) + (y-1) = \\ = (y-1)(y^2+y+2).$$

Итак, имеем неравенство $(y-1)(y^2+y+2) > 0$. Учтя, что $y^2 + y + 2 > 0$, придём к более простому неравенству $y - 1 > 0$, т. е. $y > 1$.

Осталось решить неравенство $\left(\frac{2}{3}\right)^{x} > 1$. Получим: $x < 0$ — решение заданного неравенства. ■

Пример 5. Решить неравенство $(x^2 + x + 1)^x \leqslant 1$.

Решение. Дискриминант квадратного трёхчлена $y = x^2 + x + 1$ отрицателен, а коэффициент при x^2 положителен. Значит, этот трёхчлен при любых значениях x принимает положительные значения. Нам следует рассмотреть для этого трёхчлена три возможности: 1) $0 < y < 1$; 2) $y = 1$; 3) $y > 1$. Правую часть заданного неравенства полезно переписать в виде $(x^2 + x + 1)^0$.

1) Пусть $0 < x^2 + x + 1 < 1$. Тогда неравенство $(x^2 + x + 1)^x \leqslant (x^2 + x + 1)^0$ можно рассматривать как показательное неравенство вида $y^x \leqslant y^0$, где $0 < y < 1$. Значит, получаем: $x \geqslant 0$. Но нужно ещё учесть условие $0 < x^2 + x + 1 < 1$. Левое неравенство очевидно, а из правого находим: $x^2 + x < 0$; $x(x+1) < 0$; $-1 < x < 0$. Это неравенство несовместно с условием $x \geqslant 0$. Значит, в первом случае заданное неравенство не имеет решений.

2) Пусть $x^2 + x + 1 = 1$. Тогда неравенство $(x^2 + x + 1)^x \leqslant \leqslant (x^2 + x + 1)^0$ принимает вид $1^x \leqslant 1$. Это верно при любых x, но нужно учесть условие $x^2 + x + 1 = 1$, откуда находим: $x_1 = 0$, $x_2 = -1$.

3) Пусть $x^2 + x + 1 > 1$. Тогда неравенство $(x^2 + x + 1)^x \leqslant \leqslant (x^2 + x + 1)^0$ можно рассматривать как показательное неравенство вида $y^x \leqslant y^0$, где $y > 1$. Значит, получаем: $x \leqslant 0$. Но нужно ещё учесть условие $x^2 + x + 1 > 1$. Решив это неравенство, получим: $x < -1$, $x > 0$. Решение $x > 0$ нас не устраивает (оно несовместно с условием $x \leqslant 0$). Итак, в третьем случае получаем $x < -1$.

Ответ: $x \leqslant -1$; $x = 0$.

Вопросы для самопроверки

1. Какое из двух утверждений верно, если $a > 1$: а) неравенство $a^{f(x)} > a^{g(x)}$ равносильно неравенству $f(x) < g(x)$; б) неравенство $a^{f(x)} > a^{g(x)}$ равносильно неравенству $f(x) > g(x)$?

2. Какое из двух утверждений верно, если $0 < a < 1$: а) неравенство $a^{f(x)} \leqslant a^{g(x)}$ равносильно неравенству $f(x) \leqslant g(x)$; б) неравенство $a^{f(x)} \leqslant a^{g(x)}$ равносильно неравенству $f(x) \geqslant g(x)$?

§ 14. Понятие логарифма

Рассмотрим уравнение $2^x = 4$, решим его графически. Для этого в одной системе координат построим график функции $y = 2^x$ и прямую $y = 4$ (рис. 60). Они пересекаются в точке $A(2; 4)$, значит, $x = 2$ — единственный корень уравнения.

Рассуждая точно так же, находим корень уравнения $2^x = 8$ (см. рис. 60): $x = 3$.

А теперь попробуем решить уравнение $2^x = 6$; геометрическая иллюстрация представлена на рис. 60. Ясно, что уравнение имеет один корень, но в отличие от предыдущих случаев, где корни уравнений были найдены без труда (причём их очень легко было найти и не пользуясь графиками), с уравнением $2^x = 6$ у нас возникают трудности: по чертежу мы не можем определить значение корня, можем только установить, что этот корень заключён в промежутке от 2 до 3.

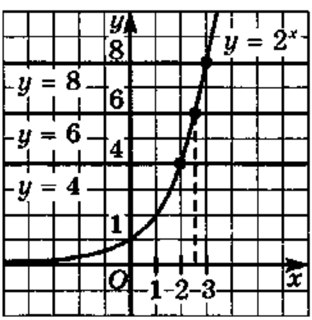


Рис. 60

С подобной ситуацией мы уже встречались в § 4, когда, решая уравнение $x^4 = 5$, поняли, что надо вводить новый символ математического языка $\sqrt[4]{5}$. Обдумывая ситуацию с показательным уравнением $2^x = 6$, математики ввели в рассмотрение новый символ $\log_2$ и с помощью этого символа корень уравнения $2^x = 6$ записали так: $x = \log_2 6$ (читают: *логарифм числа* 6 *по основанию* 2). Теперь для любого уравнения вида $2^x = b$, где $b > 0$, можно записать корень — им будет число $\log_2 b$ (рис. 61).

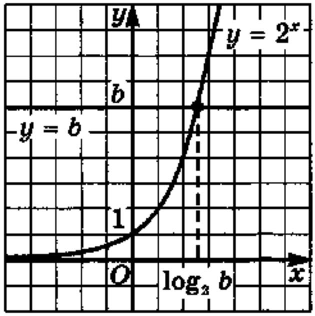


Рис. 61

Мы говорили об уравнении $2^x = 6$. С равным успехом мы могли говорить и об уравнении $3^x = 5$, и об уравнении $10^x = 0{,}3$, и об уравнении $\left(\frac{1}{3}\right)^x = 4$, и вообще о любом уравнении вида $a^x = b$, где a и b — положительные числа, причём $a \neq 1$. Единственный корень уравнения $a^x = b$ математики договорились записывать так:

$$x = \log_a b$$

(читают: *логарифм числа b по основанию a*).

Определение. **Логарифмом положительного числа b по положительному и отличному от 1 основанию a** называют показатель степени, в которую нужно возвести число a, чтобы получить число b.

Например,

$$\log_2 8 = 3, \text{ так как } 2^3 = 8;$$

$$\log_3 \left(\frac{1}{27}\right) = -3, \text{ так как } 3^{-3} = \frac{1}{27};$$

$$\log_{\frac{1}{5}} 25 = -2, \text{ так как } \left(\frac{1}{5}\right)^{-2} = 25;$$

$$\log_4 2 = \frac{1}{2}, \text{ так как } 4^{\frac{1}{2}} = 2.$$

Особо выделим три формулы (попробуйте их обосновать, это очень просто):

$$\boxed{\log_a a = 1,} \qquad \boxed{\log_a 1 = 0,} \qquad \boxed{\log_a a^c = c.}$$

Например,

$$\log_2 2 = 1, \qquad \log_3 3^4 = 4, \qquad \log_5 5^{-\frac{2}{3}} = -\frac{2}{3}, \qquad \log_8 1 = 0.$$

Для числа $\log_2 6$, которое встретилось нам в начале параграфа, точного рационального значения мы указать не можем, поскольку $\log_2 6$ — *иррациональное число.* Доказывается это довольно красиво.

Предположим, что $\log_2 6$ — рациональное число, т. е. что $\log_2 6 = \frac{m}{n}$, где m и n — натуральные числа. Тогда $2^{\frac{m}{n}} = 6$, $\left(2^{\frac{m}{n}}\right)^n = 6^n$, $2^m = 6^n$. Последнее равенство невозможно, поскольку его правая часть есть целое число, которое делится без остатка на 3, а левая часть делиться без остатка на 3 никак не может.

Полученное противоречие означает, что наше предположение неверно и, следовательно, $\log_2 6$ — иррациональное число.

Мы дали определение логарифма на обычном языке, а теперь приведём то же определение на языке символов:

$$\boxed{a^{\log_a b} = b.}$$

В самом деле, что надо подставить вместо * в равенство $a^* = b$? Какое число должно находиться в показателе степени, в которую надо возвести число a, чтобы получить число b? Ответ следует из данного выше определения: этим показателем является $\log_a b$. Значит, вместо * надо подставить число $\log_a b$, что мы и сделали.

Например, $2^{\log_2 3} = 3$, $5^{\log_5 10} = 10$, $10^{\log_{10} 0,4} = 0,4$.

Подчеркнём, что $\log_a b = c$ и $a^c = b$ — одна и та же зависимость между числами a, b и c, но только вторая описана на более простом языке (использует более простые символы), чем первая.

Операцию нахождения логарифма числа обычно называют *логарифмированием*. Эта операция является обратной по отношению к возведению в степень с соответствующим основанием. Сравните:

Возведение в степень	Логарифмирование
$5^2 = 25$	$\log_5 25 = 2$
$10^3 = 1000$	$\log_{10} 1000 = 3$
$0,3^4 = 0,0081$	$\log_{0,3} 0,0081 = 4$

Вычисление значения логарифма сводится, как правило, к решению некоторого показательного уравнения.

Пример. Вычислить:

а) $\log_4 128$; б) $\log_{\sqrt{3}} \sqrt[3]{9}$; в) $\log_{\frac{1}{2}} 4\sqrt{2}$.

Решение. а) Пусть $\log_4 128 = x$. Тогда по определению логарифма $4^x = 128$. Решая это показательное уравнение, последовательно находим:

$$2^{2x} = 2^7,\ 2x = 7,\ x = 3,5.$$

б) Пусть $\log_{\sqrt{3}} \sqrt[3]{9} = x$. Тогда по определению логарифма $(\sqrt{3})^x = \sqrt[3]{9}$. Решая это показательное уравнение, последовательно находим: $3^{\frac{x}{2}} = 3^{\frac{2}{3}}$, $\frac{x}{2} = \frac{2}{3}$, $x = \frac{4}{3}$.

в) Пусть $\log_{\frac{1}{2}} 4\sqrt{2} = x$. Тогда по определению логарифма $\left(\frac{1}{2}\right)^x = 4\sqrt{2}$. Решая это показательное уравнение, последовательно находим:

$$2^{-x} = 2^2 \cdot 2^{\frac{1}{2}},\ -x = 2 + \frac{1}{2},\ x = -2{,}5. \qquad \blacksquare$$

Логарифм по основанию 10 обычно называют *десятичным логарифмом*. Так, $\log_{10} 5$, $\log_{10} 3{,}4$ — десятичные логарифмы. Вместо символа $\log_{10}$ принято использовать символ lg; так, вместо $\log_{10} 5$ пишут $\lg 5$, а вместо $\log_{10} 3{,}4$ пишут $\lg 3{,}4$. В недалёком прошлом десятичным логарифмам отдавали предпочтение; опираясь на особенности принятой десятичной системы счисления, составляли весьма подробные таблицы десятичных логарифмов, создавали специальные логарифмические линейки. В эпоху всеобщей компьютеризации десятичные логарифмы утратили свою ведущую роль, более важны стали логарифмы по основанию 2, но особенно широко используются в математике и технике логарифмы, основанием которых служит особое число e (такое же знаменитое, как число π); с этим числом мы познакомимся позднее (в § 19).

В заключение заметим, что теперь мы в состоянии довести до конца решение уравнения $\left(\frac{5}{3}\right)^x = 2$, с которым не справились в § 12 (см. пример 7). Получим $x = \log_{\frac{5}{3}} 2$.

Вопросы для самопроверки

1. Что называют логарифмом положительного числа b по положительному и отличному от 1 основанию a? Как его обозначают?

2. Приведите два примера, когда $\log_a b$ — рациональное число.

3. Приведите два примера, когда $\log_a b$ — иррациональное число.

§ 15. Логарифмическая функция, её свойства и график

В § 14 мы ввели понятие логарифма положительного числа по положительному и отличному от 1 основанию a. Для любого положительного числа можно найти логарифм по заданному основанию. Но тогда следует подумать и о функции $y = \log_a x$, $x \in (0; +\infty)$, о её графике и свойствах. Этим и займёмся в настоящем параграфе.

В § 11, где речь шла о показательной функции $y = a^x$, мы выделили её основные свойства: эта функция определена и непрерывна на $(-\infty; +\infty)$, монотонна (возрастает при $a > 1$, убывает при $0 < a < 1$), область её значений — $(0; +\infty)$. Значит, по теореме об обратной функции (см. «Алгебра и начала математического анализа–10», § 10) для функции $y = a^x$ существует обратная функция. Этой обратной функцией является $x = \log_a y$, или, поменяв, как обычно, x и y местами, $y = \log_a x$.

Итак, $y = \log_a x$ — функция, обратная по отношению к функции $y = a^x$, а потому её график получается из графика показательной функции $y = a^x$ с помощью преобразования симметрии относительно прямой $y = x$.

На рис. 62 схематически изображены графики функций $y = a^x$ и $y = \log_a x$ в случае, когда $a > 1$; на рис. 63 схематически изображены графики функций $y = a^x$ и $y = \log_a x$ в случае, когда $0 < a < 1$.

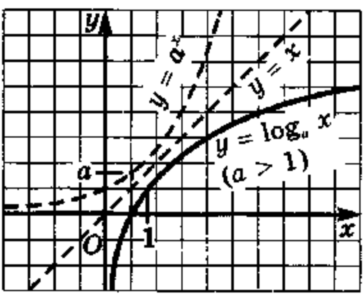


Рис. 62

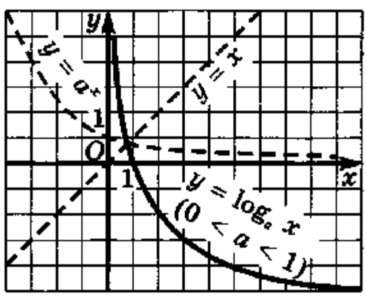


Рис. 63

График функции $y = \log_a x$ называют *логарифмической кривой*, хотя на самом деле нового названия можно было и не придумывать. Ведь это та же экспонента, что служит графиком показательной функции, только по-другому расположенная на координатной плоскости.

Если значение основания a указано, то график логарифмической функции можно построить по точкам. Пусть, например, нужно построить график функции $y = \log_2 x$. Составляя таблицу контрольных точек, будем руководствоваться соотношением $\log_2 2^r = r$ (см. § 14). Поэтому в таблицу в качестве значений аргумента x мы включим числа, являющиеся степенями числа 2.

Имеем:

$$\log_2\left(\frac{1}{4}\right) = \log_2 2^{-2} = -2; \qquad \log_2 2 = \log_2 2^1 = 1;$$

$$\log_2 4 = \log_2 2^2 = 2;$$

$$\log_2\left(\frac{1}{2}\right) = \log_2 2^{-1} = -1; \qquad \log_2 8 = \log_2 2^3 = 3.$$

$$\log_2 1 = \log_2 2^0 = 0;$$

Сведём полученные результаты в таблицу:

x	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8
$y = \log_2 x$	−2	−1	0	1	2	3

Построив на координатной плоскости точки $\left(\frac{1}{4}; -2\right)$, $\left(\frac{1}{2}; -1\right)$, $(1; 0)$, $(2; 1)$, $(4; 2)$, $(8; 3)$, проводим через них логарифмическую кривую (рис. 64).

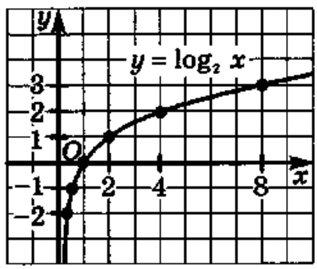


Рис. 64

Свойства функции $y = \log_a x$, $a > 1$.

Необходимую информацию извлекаем из геометрической модели, представленной на рис. 62.

1) $D(f) = (0; +\infty)$;
2) не является ни чётной, ни нечётной;
3) возрастает на $(0; +\infty)$;
4) не ограничена сверху, не ограничена снизу;
5) не имеет ни наибольшего, ни наименьшего значений;
6) непрерывна;
7) $E(f) = (-\infty; +\infty)$;
8) выпукла вверх.

Замечание. Сравните график функции $y = \log_a x$, изображённый на рис. 62, и график функции $y = x^r$ $(0 < r < 1)$, изображённый на рис. 21 (§ 9). Не правда ли, они похожи (при $x > a$)? На самом деле между ними есть принципиальная разница: график функции $y = x^r$ «набирает обороты» быстрее. Иными словами, для достаточно больших значений x ордината графика степенной функции $y = x^r$ (при $0 < r < 1$ и уж тем более при $r \geqslant 1$) значительно больше соответствующей ординаты графика логарифмической функции с любым основанием, большим чем 1. В курсе математического анализа доказано, что при $a > 1$ и $r > 0$ выполняется равенство

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\log_a x}{x^r} = 0.$$

Свойства функции $y = \log_a x$, $0 < a < 1$.

Необходимую информацию извлекаем из геометрической модели, представленной на рис. 63.

1) $D(f) = (0; +\infty)$;
2) не является ни чётной, ни нечётной;
3) убывает на $(0; +\infty)$;
4) не ограничена сверху, не ограничена снизу;
5) нет ни наибольшего, ни наименьшего значений;
6) непрерывна;
7) $E(f) = (-\infty; +\infty)$;
8) выпукла вниз.

Отметим, что ось y является вертикальной асимптотой графика логарифмической функции и в случае, когда $a > 1$, и в случае, когда $0 < a < 1$.

Пример 1. Найти наименьшее и наибольшее значения функции на заданном промежутке:

а) $y = \lg x$, $x \in [1; 1000]$; б) $y = \log_{\frac{1}{3}} x$, $x \in \left[\frac{1}{9};\ 27\right]$.

Решение. а) Функция $y = \lg x$ — непрерывная и возрастающая, поскольку основание этой логарифмической функции больше 1 (напомним, что $\lg x = \log_{10} x$). Следовательно, своих наименьшего и наибольшего значений функция достигает на концах заданного отрезка $[1; 1000]$:

$$y_{\text{наим}} = \lg 1 = 0;$$
$$y_{\text{наиб}} = \lg 1000 = \log_{10} 10^3 = 3.$$

б) Функция $y = \log_{\frac{1}{3}} x$ — непрерывная и убывающая, поскольку основание этой логарифмической функции, т. е. число $\frac{1}{3}$, меньше 1. Следовательно, своих наибольшего и наименьшего значений функция достигает на концах заданного отрезка $\left[\frac{1}{9};\ 27\right]$:

$$y_{\text{наиб}} = \log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{9} = \log_{\frac{1}{3}} \left(\frac{1}{3}\right)^2 = 2;$$

$$y_{\text{наим}} = \log_{\frac{1}{3}} 27 = \log_{\frac{1}{3}} \left(\frac{1}{3}\right)^{-3} = -3.$$ ■

Пример 2. Решить уравнение и неравенства:

а) $\log_5 x = 0$; б) $\log_5 x > 0$; в) $\log_5 x < 0$.

Решение. График функции $y = \log_5 x$ схематически изображён на рис. 62. Заданные уравнение и неравенства нетрудно решить, используя эту геометрическую модель, причём в силу монотонности функции решение будет вполне строгим.

а) Уравнение $\log_5 x = 0$ имеет один корень $x = 1$, поскольку график функции $y = \log_5 x$ пересекает ось x в единственной точке (1; 0).

б) График функции $y = \log_5 x$ расположен выше оси x при $x > 1$. Значит, решение неравенства $\log_5 x > 0$ имеет вид $x > 1$.

в) График функции $y = \log_5 x$ расположен ниже оси x при $0 < x < 1$. Значит, решение неравенства $\log_5 x < 0$ имеет вид $0 < x < 1$.

Ответ: а) $x = 1$; б) $x > 1$; в) $0 < x < 1$.

Пример 3. Решить уравнение и неравенства:

а) $\log_{\frac{2}{5}} x = 0$; б) $\log_{\frac{2}{5}} x > 0$; в) $\log_{\frac{2}{5}} x < 0$.

Решение. График функции $y = \log_{\frac{2}{5}} x$ схематически изображён на рис. 63. Заданные уравнение и неравенства нетрудно решить, используя эту геометрическую модель.

а) Уравнение $\log_{\frac{2}{5}} x = 0$ имеет один корень $x = 1$, поскольку график функции $y = \log_{\frac{2}{5}} x$ пересекает ось x в единственной точке (1; 0).

б) График функции $y = \log_{\frac{2}{5}} x$ расположен выше оси y при $0 < x < 1$. Значит, решение неравенства $\log_{\frac{2}{5}} x > 0$ имеет вид $0 < x < 1$.

в) График функции $y = \log_{\frac{2}{5}} x$ расположен ниже оси x при $x > 1$. Значит, решение неравенства $\log_{\frac{2}{5}} x < 0$ имеет вид $x > 1$.

Ответ: а) $x = 1$; б) $0 < x < 1$; в) $x > 1$.

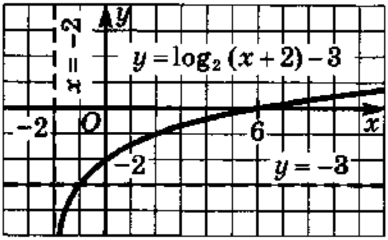


Рис. 65

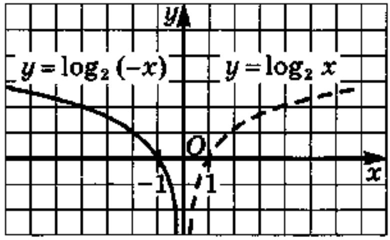


Рис. 66

Пример 4. Построить графики функций:

а) $y = \log_2(x + 2) - 3$;

б) $y = \log_2(-x)$;

в) $y = -3\log_2 \frac{x}{2}$.

Решение. В этом примере нужно выполнить различные преобразования графика функции $y = \log_2 x$ (рис. 64).

а) Перейдём к вспомогательной системе координат с началом в точке $(-2; -3)$ (пунктирные прямые $x = -2$ и $y = -3$ на рис. 65). «Привяжем» график функции $y = \log_2 x$ к новой системе координат — это и будет требуемый график (см. рис. 65).

б) Напомним, что график функции $y = f(-x)$ симметричен графику функции $y = f(x)$ относительно оси y. Учтя это, строим график функции $y = \log_2 x$, а затем, подвергнув его преобразованию симметрии относительно оси y, получаем график функции $y = \log_2(-x)$ (рис. 66).

в) Построение графика функции $y = -3\log_2 \frac{x}{2}$ осуществим в несколько шагов.

1) Построим график функции $y = \log_2 x$ (пунктирная линия на рис. 67).

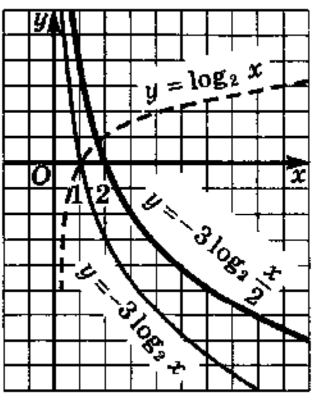


Рис. 67

2) Осуществим растяжение построенного графика от оси x с коэффициентом 3 и симметрию «растянутого» графика относительно оси x. Получим график функции $y = -3\log_2 x$ (тонкая линия на рис. 67).

3) Осуществим сжатие построенного графика к оси y с коэффициентом $\frac{1}{2}$ (т. е. растяжение графика от оси y с коэффициентом 2). Получим график функции $y = -3\log_2 \frac{x}{2}$ (жирная линия на рис. 67). ■

Пример 5. Построить и прочитать график функции

$$y = \begin{cases} 2^x, \text{ если } x \leqslant 1, \\ \log_{\frac{1}{2}} x, \text{ если } x > 1. \end{cases}$$

Решение. Построим график функции $y = 2^x$ и выделим его часть на луче $(-\infty; 1]$ (выделенная часть пунктирной линии на рис. 68). Построим график функции $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ и выделим его часть на открытом луче $(1; +\infty)$ (выделенная часть тонкой линии на рис. 68). Объединение двух выделенных на рис. 68 линий и представляет собой график заданной функции.

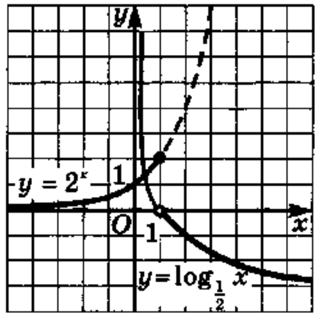


Рис. 68

Прочитаем график, т. е. укажем иллюстрируемые графиком свойства заданной функции:

1) $D(f) = (-\infty; +\infty)$;

2) не является ни чётной, ни нечётной;

3) возрастает на луче $(-\infty; 1]$, убывает на открытом луче $(1; +\infty)$;

4) не ограничена снизу, ограничена сверху;

5) $y_{\text{наиб}} = 2$ (достигается в точке $x = 1$), наименьшего значения у функции нет;

6) функция непрерывна на луче $(-\infty; 1)$ и на открытом луче $(1; +\infty)$; претерпевает разрыв в точке $x = 1$;

7) $E(f) = (-\infty; 0) \cup (0; 2]$;

8) выпукла вниз на промежутках $(-\infty; 1]$ и $(1; +\infty)$.

Заметим, что прямая $y = 0$ (ось x) является горизонтальной асимптотой графика функции при $x \to -\infty$. Это значит, что $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$. ■

Пример 6. Решить уравнение $\lg x = 11 - x$.

Решение. Достаточно очевидно, что $x = 10$ — корень уравнения. В самом деле, $\lg 10 = 1$ и $11 - 10 = 1$, т. е. при $x = 10$ заданное уравнение обращается в верное числовое равенство $1 = 1$.

Так как функция $y = \lg x$ возрастает, а функция $y = 11 - x$ убывает, то заданное уравнение имеет только один корень, который уже найден путём подбора: $x = 10$. ■

Завершая разговор о логарифмических функциях и их графиках, рассмотрим более сложный пример, где речь идёт о построении графиков нескольких «экзотических» функций.

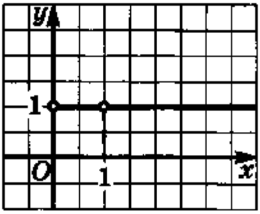


Рис. 69

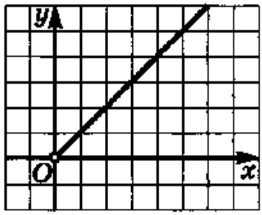


Рис. 70

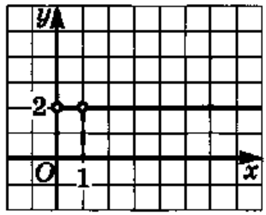


Рис. 71

Пример 7. Построить графики функций:

а) $y = \log_x x$; б) $y = 2^{\log_2 x}$; в) $y = x^{\log_x 2}$.

Решение. а) Мы знаем, что $\log_x x = 1$, но при этом следует учесть, что x — основание логарифма, а потому $x > 0$ и $x \neq 1$. Значит, речь идёт о построении графика функции $y = 1$, область определения которой задаётся условиями $x > 0$, $x \neq 1$. График функции изображён на рис. 69.

б) Мы знаем, что $2^{\log_2 x} = x$, но при этом следует учесть, что x — логарифмируемое число, а потому $x > 0$. Значит, речь идёт о построении графика функции $y = x$, область определения которой задаётся условием $x > 0$. График функции изображён на рис. 70.

в) Мы знаем, что $x^{\log_x 2} = 2$, но при этом следует учесть, что x — основание логарифма, а потому $x > 0$ и $x \neq 1$. Значит, речь идёт о построении графика функции $y = 2$, область определения которой задаётся условиями $x > 0$ и $x \neq 1$. График функции изображён на рис. 71. ■

Вопросы для самопроверки

1. Как связаны между собой графики функций:

а) $y = 2^x$ и $y = \log_2 x$;

б) $y = 10^x$ и $y = \lg x$;

в) $y = \log_3 x$ и $y = -\log_3 x$;

г) $y = \log_3 x$ и $y = \log_3 x + 2$;

д) $y = \log_3 x$ и $y = \log_3(x - 2)$?

2. При каком основании a функция $y = \log_a x$: а) возрастает; б) убывает; в) выпукла вверх; г) выпукла вниз?

3. Напишите уравнение асимптоты для графика функции:

а) $y = \lg x$;

б) $y = \log_2(x - 1)$;

в) $y = \log_{0,5}(x + 4)$;

г) $y = \log_2 x - 3$.

4. Решите неравенство:

а) $\log_2 x > 0$;

б) $\log_{\frac{2}{3}} x \leqslant 0$;

в) $\log_{\frac{4}{3}} x \leqslant 0$;

г) $\log_{0,7} x > 0$.

5. Найдите наименьшее значение функции $y = \begin{cases} 1 - x, & x \leqslant 1, \\ \log_5 x, & x > 1. \end{cases}$

§ 16. Свойства логарифмов

В предыдущих параграфах мы ввели понятие логарифма положительного числа по положительному и отличному от 1 основанию, изучили свойства функции $y = \log_a x$, построили её график. Но чтобы успешно использовать на практике операцию логарифмирования, нужно познакомиться со свойствами этой операции, что мы и сделаем в настоящем параграфе. Все свойства формулируются и доказываются только *для положительных значений переменных,* содержащихся под знаками логарифмов. Впрочем, два свойства доказательства не требуют, они представляют собой запись на математическом языке определения логарифма как показателя степени, мы ими уже пользовались:

$$\log_a a^r = r, \qquad a^{\log_a b} = b.$$

Теорема 1. ***Логарифм произведения двух положительных чисел равен сумме логарифмов этих чисел:***

$$\boxed{\log_a bc = \log_a b + \log_a c.}$$

Например,

$$\log_2 15 = \log_2 (3 \cdot 5) = \log_2 3 + \log_2 5;$$
$$\log_3 18 = \log_3 (9 \cdot 2) = \log_3 9 + \log_3 2 = 2 + \log_3 2;$$
$$\lg 5 + \lg 2 = \lg (5 \cdot 2) = \lg 10 = 1.$$

Доказательство. Введём следующие обозначения: $\log_a bc = x$, $\log_a b = y$, $\log_a c = z$. Нам надо доказать, что выполняется равенство $x = y + z$.

Так как $\log_a bc = x$, то $a^x = bc$.

Так как $\log_a b = y$, то $a^y = b$.

Так как $\log_a c = z$, то $a^z = c$.

Итак, $a^x = bc$, $a^y = b$, $a^z = c$.

Значит, $a^y \cdot a^z = a^x$, т. е. $a^{y+z} = a^x$.

Но если степени двух положительных чисел равны и основания степеней равны и отличны от 1, то равны и показатели степеней. Значит, $y + z = x$, что и требовалось доказать.

Теорема остаётся справедливой и для случая, когда логарифмируемое выражение представляет собой произведение более двух положительных чисел.

Например, $\log_5 2 + \log_5 3 + \log_5 7 = \log_5 (2 \cdot 3 \cdot 7) = \log_5 42$.

Теорему 1 можно сформулировать, используя конструкцию «если... то» (как принято для теорем в математике). Приведём соответствующую формулировку: *если a, b и c — положительные числа, причём $a \neq 1$, то справедливо равенство* $\log_a bc = \log_a b + \log_a c$. Следующую теорему мы именно так и оформим.

Теорема 2. ***Если a, b, c — положительные числа, причём $a \neq 1$, то справедливо равенство***

$$\boxed{\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c.}$$

Краткая формулировка, которую удобнее использовать на практике: *логарифм частного равен разности логарифмов делимого и делителя* или *логарифм дроби равен разности логарифмов числителя и знаменателя.*

Например,

$$\log_{\frac{1}{2}} 2{,}5 = \log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{5}{2}\right) = \log_{\frac{1}{2}} 5 - \log_{\frac{1}{2}} 2 = \log_{\frac{1}{2}} 5 + 1;$$

$$\lg 15 - \lg 3 = \lg \frac{15}{3} = \lg 5.$$

Доказательство аналогично доказательству теоремы 1, проведите его самостоятельно.

Теорема 3. ***Если a и b — положительные числа, причём $a \neq 1$, то для любого числа r справедливо равенство***

$$\boxed{\log_a b^r = r \log_a b.}$$

Краткая формулировка, которую удобнее использовать на практике: *логарифм степени равен произведению показателя степени на логарифм основания степени.*

Например,

$$\log_{\frac{1}{2}} 25 = \log_{\frac{1}{2}} 5^2 = 2\log_{\frac{1}{2}} 5;$$

$$\lg \frac{1}{5} = \lg 5^{-1} = -\lg 5;$$

$$3\log_2 5 = \log_2 5^3 = \log_2 125.$$

Доказательство. Введём следующие обозначения: $\log_a b^r = x$, $\log_a b = y$. Нам надо доказать, что $x = ry$.

Из $\log_a b^r = x$ следует, что $a^x = b^r$; из $\log_a b = y$ следует, что $a^y = b$. Возведя обе части последнего равенства в степень r, получим $a^{ry} = b^r$.

Итак, $a^x = b^r$, $a^{ry} = b^r$, значит, $a^x = a^{ry}$, т. е. $x = ry$, что и требовалось доказать.

Пример 1. Известно, что положительные числа x, y, z, t связаны соотношением $x = \frac{yz^3}{\sqrt[3]{t}}$. Выразить $\log_a x$ через логарифмы по основанию a чисел y, z, t.

Решение. 1) Логарифм дроби равен разности логарифмов числителя и знаменателя. Значит, $\log_a \frac{yz^3}{\sqrt[3]{t}} = \log_a (yz^3) - \log_a \sqrt[3]{t}$.

2) Логарифм произведения равен сумме логарифмов множителей. Значит, $\log_a(yz^3) = \log_a y + \log_a z^3$.

3) Логарифм степени равен произведению показателя степени па логарифм основания степени. Значит,

$$\log_a z^3 = 3\log_a z; \ \log_a \sqrt[3]{t} = \log_a t^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3}\log_a t.$$

4) В итоге получаем:

$$\log_a x = \log_a(yz^3) - \log_a \sqrt[3]{t} = \log_a y + \log_a z^3 - \frac{1}{3}\log_a t =$$

$$= \log_a y + 3\log_a z - \frac{1}{3}\log_a t.$$

При наличии определённого опыта решение примера можно не разбивать на последовательные этапы, а оформить его так:

$$\log_a x = \log_a \frac{yz^3}{\sqrt[3]{t}} = \log_a y + \log_a z^3 - \log_a t^{\frac{1}{3}} =$$

$$= \log_a y + 3\log_a z - \frac{1}{3}\log_a t. \quad \blacksquare$$

Ещё раз подчеркнём, что все свойства логарифмов мы получили при условии, что переменные принимают положительные значения. А как быть, если про знак переменной ничего не известно? Можно ли, например, написать $\lg x^2 = 2\lg x$, если о знаке числа x ничего не известно? Отвечаем: нельзя, поскольку при $x < 0$ левая часть равенства определена, а правая не определена. Как же быть в таком случае? Нас выручит знак модуля. Поскольку $x^2 = |x|^2$ и $|x| > 0$ при $x \neq 0$, верное равенство выглядит так: $\lg x^2 = 2\lg |x|$. Это частный случай общей формулы

$$\boldsymbol{\log_a x^{2n} = 2n\log_a |x| \ (n \in Z).}$$

Помните и о том, что заменять выражение $\log_a bc$ выражением $\log_a b + \log_a c$ мы имеем право лишь в случае, когда $b > 0$ и $c > 0$. Если мы в этом не уверены, но знаем, что $bc > 0$, то, поскольку в этом случае выполняется равенство $bc = |b|\cdot|c|$, следует использовать формулу

$$\boldsymbol{\log_a bc = \log_a |b| + \log_a |c|, \text{ где } bc > 0.}$$

Если некоторое выражение A составлено из положительных чисел x, y, z с помощью операций умножения, деления и возведения в степень, то, используя свойства логарифмов, можно выразить $\log_a A$ через логарифмы чисел x, y, z. Такое преобразование называют *логарифмированием* (см. пример 1). Ценность операции логарифмирования состоит в том, что она позволяет сводить вычисления к операциям более низкого порядка: произведение, частное, степень заменяются соответственно на сумму, разность, произведение.

Иногда приходится решать обратную задачу: находить выражение, логарифм которого представлен через логарифмы некоторых чисел (*потенцирование*). При этом используется следующее утверждение.

Теорема 4. ***Равенство*** $\log_a t = \log_a s$, ***где*** $a > 0$, $a \neq 1$, $t > 0$, $s > 0$, ***справедливо тогда и только тогда, когда*** $t = s$.

Это достаточно очевидное следствие монотонности логарифмической функции.

Пример 2. Известно, что $\lg x = 2\lg y - \lg z + 0{,}5\lg t$. Выразить x через y, z, t.

Решение. Имеем последовательно:

$$2\lg y = \lg y^2;$$

$$0{,}5\lg t = \lg t^{0,5} = \lg \sqrt{t};$$

$$2\lg y - \lg z + 0{,}5\lg t = \lg y^2 + \lg \sqrt{t} - \lg z = \lg \frac{y^2\sqrt{t}}{z}.$$

Итак, $\lg x = \lg \frac{y^2\sqrt{t}}{z}$, и, следовательно, $x = \frac{y^2\sqrt{t}}{z}$. ■

Пример 3. Известно, что $\log_3 2 = a$. Вычислить $\log_3 6{,}75$.

Решение. Выразим число 6,75 через числа 3 и 2 (3 — основание логарифма, 2 — заданное в условии логарифмируемое число) с помощью операций умножения, деления и возведения в степень:

$$6{,}75 = 6\frac{3}{4} = \frac{27}{4} = \frac{3^3}{2^2}.$$

Значит,

$$\log_3 6{,}75 = \log_3\left(\frac{3^3}{2^2}\right) = \log_3 3^3 - \log_3 2^2 = 3 - 2\log_3 2 = 3 - 2a.$$

Ответ: $3 - 2a$.

Пример 4. Вычислить $49^{1 - 0,25\log_7 25}$.

Решение. Поработаем с показателем степени:

$$1 - 0{,}25\log_7 25 = \log_7 7 - \log_7 25^{\frac{1}{4}} = \log_7 7 - \log_7 \sqrt[4]{5^2} =$$

$$= \log_7 7 - \log_7 \sqrt{5} = \log_7 \frac{7}{\sqrt{5}}.$$

Теперь заданное числовое выражение мы можем записать в виде $49^{\log_7 \frac{7}{\sqrt{5}}}$.

Далее находим:

$$49^{\log_7 \frac{7}{\sqrt{5}}} = 7^{2\log_7 \frac{7}{\sqrt{5}}} = 7^{\log_7 \left(\frac{7}{\sqrt{5}}\right)^2} = 7^{\log_7 \frac{49}{5}}.$$

Остаётся вспомнить, что $a^{\log_a b} = b$. Значит,

$$7^{\log_7 \frac{49}{5}} = \frac{49}{5} = 9{,}8.$$

Ответ: 9,8.

Пример 5. Положительное число a записано в стандартном виде $a = a_0 \cdot 10^n$, где $1 \leqslant a_0 < 10$ и n — целое число. Найти десятичный логарифм числа a.

Решение. $\lg a = \lg(a_0 \cdot 10^n) = \lg a_0 + \lg 10^n = \lg a_0 + n$.
Таким образом, $\lg a = n + \lg a_0$. ■

Проанализируем полученный в примере 5 результат. По условию $1 \leqslant a_0 < 10$, значит, в силу возрастания функции $y = \lg x$ имеем $\lg 1 \leqslant \lg a_0 < \lg 10$, т. е. $0 \leqslant \lg a_0 < 1$.

Таким образом, нам удалось представить число $\lg a$ в виде суммы целого числа n и числа $\lg a_0$, заключённого в промежутке $[0; 1)$. Это значит, что n — *целая часть* числа $\lg a$, а $\lg a_0$ — *дробная часть* числа $\lg a$.

Обычно целую часть числа $\lg a$ называют *характеристикой десятичного логарифма числа* a, а дробную часть числа $\lg a$ называют *мантиссой десятичного логарифма числа* a.

Математики, как вы знаете, ничего просто так не делают; если уж они выделили десятичные логарифмы, ввели термины «характеристика» и «мантисса», значит, с определённой целью. С какой? Для ответа на этот вопрос рассмотрим пример: вычислить $\lg 70$, $\lg 700$, $\lg 700\,000$, $\lg 0{,}007$, если известно, что $\lg 7 \approx 0{,}8451$.

Имеем:

$$\lg 70 = \lg(7 \cdot 10) = \lg 7 + \lg 10 \approx 0{,}8451 + 1 = 1{,}8451;$$
$$\lg 700 = \lg(7 \cdot 10^2) = \lg 7 + \lg 10^2 \approx 0{,}8451 + 2 = 2{,}8451;$$
$$\lg 700\,000 = \lg(7 \cdot 10^5) = \lg 7 + \lg 10^5 \approx 0{,}8451 + 5 = 5{,}8451;$$
$$\lg 0{,}007 = \lg(7 \cdot 10^{-3}) = \lg 7 + \lg 10^{-3} \approx 0{,}8451 - 3 = -2{,}1549.$$

Таким образом, возвращаясь к решению примера 5, достаточно составить таблицу десятичных логарифмов чисел, заключённых в промежутке $[1; 10)$, чтобы с её помощью и с помощью стандартного вида положительного числа вычислять десятичные логарифмы любых положительных чисел.

Рассмотрим занимательный пример, где используются десятичные логарифмы.

Пример 6. Сколько цифр содержит число 7^{100}?

Решение. Часто начинают решать эту задачу «в лоб»: возводят число 7 постепенно в первую, вторую, третью и т. д. степень и пытаются увидеть закономерность. Имеем:

$7^1 = 7$ (одна цифра), $7^2 = 49$ (две цифры), $7^3 = 343$ (три цифры), $7^4 = 2401$ (четыре цифры), $7^5 = 16\,807$ (пять цифр), $7^6 = 117\,649$ (шесть цифр).

Возникает естественная гипотеза: каков показатель степени, столько цифр в результате. Но эта гипотеза рушится уже на следующем шаге: $7^7 = 823\,543$ — в этом числе не 7, а 6 цифр. Так что метод перебора и угадывания здесь не срабатывает.

Поступим по-другому: вычислим десятичный логарифм числа 7^{100}. Получаем: $\lg 7^{100} = 100 \lg 7 = 100 \cdot 0{,}8451 = 84{,}51$.

Видим, что характеристика логарифма равна 84. Значит, порядок числа 7^{100} равен 84, а потому в числе 7^{100} — 85 цифр.

Ответ: 85 цифр.

Логарифмических функций бесконечно много: $y = \log_2 x$; $y = \log_3 x$; $y = \log_{0,3} x$; $y = \lg x$; $y = \log_{\frac{8}{7}} x$ и т. д. Возникает вопрос, как они связаны между собой. Есть ли, например, какая-то связь между функциями $y = \log_2 x$ и $y = \log_3 x$? На рис. 72 изображены графики функций $y = \log_2 x$ и $y = \log_3 x$. Не кажется ли вам, что график первой функции получается из графика второй функции растяжением от оси x с некоторым коэффициентом $k > 1$? Если это на самом деле верно, то должно выполняться равенство

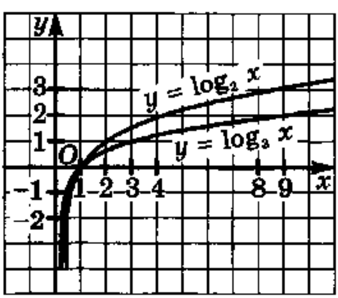


Рис. 72

$$\log_2 x = k \log_3 x.$$

Так ли это? Теоретической основой для ответа является следующая теорема.

Теорема 5. ***Если a, b, c — положительные числа, причём a и c отличны от 1, то имеет место равенство***

$$\boxed{\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}} \qquad (1)$$

(формула перехода к новому основанию логарифма).

Например, $\log_2 3 = \dfrac{\log_5 3}{\log_5 2}$; $\log_7 4 = \dfrac{\lg 4}{\lg 7}$ и т. д.

Доказательство. Введём следующие обозначения: $\log_a b = x$, $\log_c b = y$, $\log_c a = z$. Нам надо доказать, что $x = \frac{y}{z}$.

Из $\log_a b = x$ следует, что $a^x = b$; из $\log_c b = y$ следует, что $c^y = b$. Итак, $a^x = c^y$. Далее, из $\log_c a = z$ следует, что $c^z = a$. Значит, $(c^z)^x = c^y$, т. е. $zx = y$, что фактически и требовалось доказать.

Теперь нетрудно ответить на поставленный выше вопрос: как связаны между собой различные логарифмические функции? Рассмотрим логарифмические функции $y = \log_2 x$ и $y = \log_3 x$, графики которых изображены на рис. 72. По формуле (1) получаем:

$$\log_3 x = \frac{\log_2 x}{\log_2 3}, \text{ откуда находим, что } \log_2 x = \log_2 3 \cdot \log_3 x.$$

Таким образом, наша догадка подтвердилась: действительно, справедливо соотношение $\log_2 x = k \log_3 x$, где $k = \log_2 3$; подтвердилась и наша догадка о том, что в данном случае $k > 1$, поскольку $\log_2 3 > 1$.

Аналогичные формулы связывают и другие логарифмические функции. Например, справедливы соотношения:

$$\log_5 x = k \log_7 x, \text{ где } k = \log_5 7;$$
$$\lg x = k \log_{0,5} x, \text{ где } k = \lg 0{,}5 \text{ и т. д.}$$

Рассмотрим два важных частных случая формулы перехода к новому основанию логарифма, два следствия из доказанной теоремы.

Следствие 1. Если a и b — положительные и отличные от 1 числа, то справедливо равенство

$$\boxed{\log_a b = \frac{1}{\log_b a}.} \qquad (2)$$

Например, $\log_2 3 = \frac{1}{\log_3 2}$; $\lg 5 = \frac{1}{\log_5 10}$.

Доказательство. Применив формулу (1) к случаю, когда $c = b$, получим:

$$\log_a b = \frac{\log_b b}{\log_b a} = \frac{1}{\log_b a}.$$

Следствие 2. Если a и b — положительные числа, причём $a \neq 1$, то для любого числа $r \neq 0$ справедливо равенство

$$\boxed{\log_a b = \log_{a^r} b^r.} \qquad (3)$$

Например, $\log_2 3 = \log_{2^2} 3^2 = \log_{2^{-1}} 3^{-1} = \log_{\sqrt{2}} \sqrt{3}$ и т. д.

Доказательство. Перейдём в выражении $\log_{a^r} b^r$ к логарифмам по основанию a: $\log_{a^r} b^r = \dfrac{\log_a b^r}{\log_a a^r} = \dfrac{r \log_a b}{r} = \log_a b$.

Пример 7. Дано: $\lg 3 = a$, $\lg 5 = b$. Найти $\log_2 15$.

Решение. Воспользовавшись формулой (1) перехода к новому основанию, а затем свойствами логарифма, получим:

$$\log_2 15 = \frac{\lg 15}{\lg 2} = \frac{\lg (3 \cdot 5)}{\lg \frac{10}{5}} = \frac{\lg 3 + \lg 5}{\lg 10 - \lg 5} = \frac{a + b}{1 - b}. \qquad \blacksquare$$

Пример 8. Дано $\log_{14} 28 = a$. Найти $\log_{49} 16$.

Решение. Сначала воспользуемся формулой (3):

$$\log_{49} 16 = \log_{\sqrt{49}} \sqrt{16} = \log_7 2^2 = 2\log_7 2.$$

Значит, нам нужно $\log_7 2$ выразить через a. Введём обозначение $\log_7 2 = x$. Тогда

$$a = \log_{14} 28 = \frac{\log_7 28}{\log_7 14} = \frac{\log_7 (7 \cdot 2^2)}{\log_7 (7 \cdot 2)} = \frac{\log_7 7 + 2\log_7 2}{\log_7 7 + \log_7 2} = \frac{1 + 2x}{1 + x}.$$

Таким образом, чтобы найти x, нужно решить уравнение $\dfrac{1 + 2x}{1 + x} = a$. Из этого уравнения находим: $x = \dfrac{a - 1}{2 - a}$. Значит, $\log_{49} 16 = 2\log_7 2 = 2x = \dfrac{2(a - 1)}{2 - a}$.

Ответ: $\dfrac{2(a - 1)}{2 - a}$.

Пример 9. Дано: $\log_6 30 = a$, $\log_{15} 24 = b$. Найти $\log_{12} 60$.

Решение.

$$\log_{12} 60 = \frac{\log_2 60}{\log_2 12} = \frac{\log_2 (3 \cdot 5 \cdot 2^2)}{\log_2 (3 \cdot 2^2)} = \frac{\log_2 3 + \log_2 5 + 2}{\log_2 3 + 2}.$$

Есть смысл ввести обозначения: $\log_2 3 = x$, $\log_2 5 = y$. Тогда $\log_{12} 60 = \dfrac{x + y + 2}{x + 2}$.

Теперь поработаем с теми логарифмами, которые даны в условии:

$$a = \log_6 30 = \frac{\log_2 30}{\log_2 6} = \frac{\log_2 (3 \cdot 5 \cdot 2)}{\log_2 (3 \cdot 2)} = \frac{\log_2 3 + \log_2 5 + \log_2 2}{\log_2 3 + \log_2 2} =$$

$$= \frac{x + y + 1}{x + 1};$$

$$b = \log_{15} 24 = \frac{\log_2 24}{\log_2 15} = \frac{\log_2 (3 \cdot 2^3)}{\log_2 (3 \cdot 5)} = \frac{\log_2 3 + 3\log_2 2}{\log_2 3 + \log_2 5} = \frac{x + 3}{x + y}.$$

Таким образом, чтобы найти x и y, нам следует решить систему уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{x + y + 1}{x + 1} = a, \\ \dfrac{x + 3}{x + y} = b. \end{cases}$$

Освободившись в обоих уравнениях от знаменателей, получим систему двух линейных уравнений:

$$\begin{cases} (1 - a)x + y = a - 1, \\ (b - 1)x + by = 3. \end{cases}$$

Выразим y через x из первого уравнения и подставим полученное выражение вместо y во второе уравнение системы:

$$y = a - 1 - x + ax;$$

$$bx - x + b(a - 1 - x + ax) = 3;$$

$$(ab - 1)x = b + 3 - ab;$$

$$x = \frac{b + 3 - ab}{ab - 1};$$

$$y = a - 1 + (a - 1)x = (a - 1)(1 + x) = (a - 1)\left(1 + \frac{b + 3 - ab}{ab - 1}\right) =$$

$$= \frac{(a - 1)(b + 2)}{ab - 1}.$$

Теперь уже можно выразить через a и b интересующий нас логарифм:

$$\log_{12} 60 = \frac{x + y + 2}{x + 2} =$$

$$= \left(\frac{b + 3 - ab}{ab - 1} + \frac{(a - 1)(b + 2)}{ab - 1} + 2\right) : \left(\frac{b + 3 - ab}{ab - 1} + 2\right) = \frac{2ab + 2a - 1}{ab + b + 1}.$$

Ответ: $\dfrac{2ab + 2a - 1}{ab + b + 1}$.

Вопросы для самопроверки

1. Пусть a, b, c — положительные числа, причём $a \neq 1$. Какие из следующих соотношений являются верными, а какие — нет:

а) $\log_a b + \log_a c = \log_a (b + c)$;

б) $\log_a b + \log_a c = \log_a (bc)$;

в) $\log_a b - \log_a c = \log_a \frac{b}{c}$;

г) $\log_a b - \log_a c = \log_a (b - c)$;

д) $\log_a bc = \log_a b \cdot \log_a c$;

е) $\log_a \frac{b}{c} = \frac{\log_a b}{\log_a c}$;

ж) $\log_a b^3 = 3 \log_a b$;

з) $\log_a b^3 = (\log_a b)^3$;

и) $-2 \log_a b = \log_a b^{-2}$;

к) $-2 \log_a b = \log_a \frac{1}{b^2}$?

2. При каких значениях x верно равенство:

а) $\log_3 x^2 = 2 \log_3 x$;

б) $\log_3 x^2 = -2 \log_3 x$;

в) $\log_3 x^2 = 2 \log_3 |x|$?

3. Приведите пример конкретных значений b и c, когда равенство $\lg bc = \lg b + \lg c$ является верным, и пример, когда это равенство не является верным.

4. Что называют характеристикой десятичного логарифма числа b? Найдите характеристику числа:

а) $\lg 155$; б) $\lg 2013$; в) $\lg 0{,}02$.

5. Что называют мантиссой десятичного логарифма числа b? Приведите пример трёх чисел (отличный от примера на с. 127) с одинаковой мантиссой их десятичного логарифма.

6. Запишите формулу перехода к новому основанию логарифма. Покажите, как её применить, если $\log_3 5$ нужно выразить через логарифмы по основанию 2.

7. Какие из приведённых ниже соотношений верны, а какие — нет:

а) $\frac{\log_2 7}{\log_2 5} = \log_2(7 - 5)$;

б) $\frac{\log_2 7}{\log_2 5} = \log_5 7$;

в) $\frac{\log_2 7}{\log_2 5} = \log_7 5$;

г) $\frac{\log_2 7}{\log_2 5} = \log_2 \frac{7}{5}$?

§ 17. *Логарифмические уравнения*

Логарифмическими уравнениями называют уравнения вида

$$\log_a f(x) = \log_a g(x), \qquad (1)$$

где a — положительное число, отличное от 1, и уравнения, сводящиеся к этому виду.

Опираясь на теорему 4 из § 16, согласно которой равенство $\log_a t = \log_a s$, где $a > 0$, $a \neq 1$, $t > 0$, $s > 0$, справедливо тогда и только тогда, когда $t = s$, мы можем сформулировать следующее утверждение.

Теорема. ***Пусть $a > 0$ и $a \neq 1$, X — решение системы неравенств $\begin{cases} f(x) > 0, \\ g(x) > 0. \end{cases}$ Тогда уравнение $\log_a f(x) = \log_a g(x)$ равносильно на множестве X уравнению $f(x) = g(x)$.***

На практике эту теорему применяют так: переходят от уравнения (1) к уравнению $f(x) = g(x)$ (такой переход, напомним, называют *потенцированием*), решают уравнение $f(x) = g(x)$, а затем проверяют его корни по условиям $f(x) > 0$, $g(x) > 0$, определяющим область допустимых значений (ОДЗ) переменной x. Те корни уравнения $f(x) = g(x)$, которые удовлетворяют этим условиям, являются корнями уравнения (1). Те корни уравнения $f(x) = g(x)$, которые не удовлетворяют хотя бы одному из этих условий, объявляются посторонними корнями для уравнения (1).

Пример 1. Решить уравнение

$$\log_3 (x^2 - 3x - 5) = \log_3 (7 - 2x).$$

Решение. 1) Потенцируя (т. е. освободившись от знаков логарифмов), получаем:

$$x^2 - 3x - 5 = 7 - 2x;$$
$$x^2 - x - 12 = 0;$$
$$x_1 = 4, \quad x_2 = -3.$$

2) Проверим найденные корни по условиям

$$\begin{cases} x^2 - 3x - 5 > 0, \\ 7 - 2x > 0. \end{cases}$$

Значение $x = 4$ не удовлетворяет этой системе неравенств (достаточно заметить, что $x = 4$ не удовлетворяет второму неравенству системы), т. е. $x = 4$ — посторонний корень для заданного уравнения. Значение $x = -3$ удовлетворяет обоим неравенствам системы, а потому $x = -3$ — корень заданного уравнения.

Ответ: -3.

Пример 2. Решить уравнение $\log_{x+4}(x^2 - 1) = \log_{x+4}(5 - x)$.

Решение. Потенцируя, получим уравнение $x^2 - 1 = 5 - x$, корнями которого являются числа 2 и -3. Для проверки, кроме условий $x^2 - 1 > 0$, $5 - x > 0$, придётся учесть ещё два условия: $x + 4 > 0$, $x + 4 \neq 1$. Таким образом, область допустимых значений переменной для заданного уравнения определяется системой неравенств

$$\begin{cases} x^2 - 1 > 0, \\ 5 - x > 0, \\ x + 4 > 0, \\ x + 4 \neq 1. \end{cases}$$

Значение $x = 2$ удовлетворяет этой системе, а значение $x = -3$ — нет, это посторонний корень.

Ответ: 2.

Пример 3. Решить уравнение

$$\log_2 (x + 4) + \log_2 (2x + 3) = \log_2 (1 - 2x).$$

Решение. 1) Сначала надо преобразовать уравнение к виду (1). Для этого воспользуемся правилом «сумма логарифмов равна логарифму произведения». Оно позволяет заменить выражение $\log_2 (x + 4) + \log_2 (2x + 3)$ выражением $\log_2 (x + 4)(2x + 3)$. Тогда заданное уравнение можно переписать так:

$$\log_2 (x + 4)(2x + 3) = \log_2 (1 - 2x).$$

2) Потенцируя, получаем:

$$(x + 4)(2x + 3) = 1 - 2x;$$
$$2x^2 + 8x + 3x + 12 = 1 - 2x;$$
$$2x^2 + 13x + 11 = 0;$$
$$x_1 = -1, \quad x_2 = -5{,}5.$$

3) Проверим найденные корни по условиям $\begin{cases} x + 4 > 0, \\ 2x + 3 > 0, \\ 1 - 2x > 0 \end{cases}$

(обратите внимание: *условия для проверки всегда составляют по исходному уравнению*). Значение $x = -1$ удовлетворяет этой системе неравенств, а значение $x = -5{,}5$ не удовлетворяет, это посторонний корень.

Ответ: -1.

Замечание. Иногда удобнее использовать другой порядок ходов: сначала решить систему неравенств — в примере 3 решением системы неравенств будет интервал $(-1{,}5; 0{,}5)$; это область допустимых значений переменной (ОДЗ). Затем найти корни: $x_1 = -1$, $x_2 = -5{,}5$. И наконец, сделать проверку найденных значений x, но уже не с помощью системы неравенств, а по найденной заранее области допустимых значений. В примере 3 значение $x = -1$ принадлежит интервалу $(-1{,}5; 0{,}5)$, а значение $x = -5{,}5$ этому интервалу не принадлежит. Следовательно, $x = -5{,}5$ — посторонний корень, а $x = -1$ — единственный корень заданного логарифмического уравнения.

Пример 4. Решить уравнение $\lg^2 x + \lg x + 1 = \dfrac{7}{\lg \frac{x}{10}}$.

Решение. Так как $\lg \frac{x}{10} = \lg x - \lg 10 = \lg x - 1$, то заданное уравнение можно переписать так: $\lg^2 x + \lg x + 1 = \dfrac{7}{\lg x - 1}$.

Есть смысл ввести новую переменную $y = \lg x$; тогда уравнение примет вид $y^2 + y + 1 = \dfrac{7}{y-1}$.

Далее находим:

$$(y - 1)(y^2 + y + 1) = 7;$$
$$y^3 - 1 = 7;$$
$$y^3 = 8;$$
$$y = 2.$$

Это значение удовлетворяет условию $y \neq 1$ (посмотрите: у записанного выше рационального относительно y уравнения переменная содержится в знаменателе, а потому следует проверить, не обращается ли знаменатель в 0 при найденном значении переменной y).

Итак, $y = 2$. Но $y = \lg x$, значит, нам осталось решить простейшее логарифмическое уравнение $\lg x = 2$, откуда находим: $x = 100$.

Ответ: 100.

Пример 5. Решить уравнение $\log_{0,1x} x + \log_{0,2x} x = 0$.

Решение. Перейдём к десятичным логарифмам:

$$\log_{0,1x} x = \frac{\lg x}{\lg 0{,}1x} = \frac{\lg x}{\lg x + \lg 0{,}1} = \frac{\lg x}{\lg x - 1};$$

$$\log_{0,2x} x = \frac{\lg x}{\lg 0{,}2x} = \frac{\lg x}{\lg x + \lg \frac{1}{5}} = \frac{\lg x}{\lg x - \lg 5}.$$

Тогда заданное уравнение можно переписать так:

$$\frac{\lg x}{\lg x - 1} + \frac{\lg x}{\lg x - \lg 5} = 0.$$

Введя новую переменную $y = \lg x$, получим рациональное относительно новой переменной y уравнение $\dfrac{y}{y-1} + \dfrac{y}{y - \lg 5} = 0$ и далее $2y^2 - (1 + \lg 5)y = 0$. Корнями этого квадратного уравнения служат числа $y_1 = 0$, $y_2 = \dfrac{1 + \lg 5}{2}$.

Возвращаясь к переменной x, заключаем, что либо $\lg x = 0$, т. е. $x = 1$, либо $\lg x = \frac{1 + \lg 5}{2}$. Поработаем с правой частью последнего уравнения:

$$\frac{1 + \lg 5}{2} = \frac{1}{2}(\lg 10 + \lg 5) = \frac{1}{2}\lg 50 = \lg \sqrt{50} = \lg 5\sqrt{2}.$$

Из уравнения $\lg x = \lg 5\sqrt{2}$ находим: $x = 5\sqrt{2}$.

Проверка. Область допустимых значений для заданного уравнения определяется следующими условиями: $x > 0$; $0{,}1x \neq 1$; $0{,}2x \neq 1$. Найденные значения переменной $x_1 = 1$, $x_2 = 5\sqrt{2}$ этим условиям удовлетворяют.

Ответ: 1; $5\sqrt{2}$.

Подведём некоторые итоги. Можно выделить *три основных метода решения логарифмических уравнений*.

1) Функционально-графический метод. Он основан на использовании графических иллюстраций или каких-либо свойств функций. Мы применяли этот метод в § 15.

2) Метод потенцирования. Он основан на теореме равносильности, полученной в начале параграфа. Мы применили этот метод в примерах 1, 2 и 3.

3) Метод введения новой переменной. Мы применили этот метод в примерах 4 и 5.

Завершая параграф, рассмотрим примеры, в которых для решения уравнения используется ещё один метод — *метод логарифмирования*, и пример решения системы логарифмических уравнений.

Пример 6. Решить уравнение $x^{1 - \log_5 x} = 0{,}04$.

Решение. Возьмём от обеих частей уравнения логарифмы по основанию 5; это равносильное преобразование уравнения, поскольку обе его части принимают только положительные значения. Получим $\log_5 x^{1 - \log_5 x} = \log_5 0{,}04$.

Учтём, что $\log_5 x^r = r\log_5 x$ и что

$$\log_5 0{,}04 = \log_5\left(\frac{1}{25}\right) = \log_5 5^{-2} = -2.$$

Это позволит переписать заданное уравнение в виде $(1 - \log_5 x) \times$ $\times \log_5 x = -2$. Замечаем, что «проявилась» новая переменная $y = \log_5 x$, относительно которой уравнение принимает весьма простой вид: $(1 - y)y = -2$.

Далее получаем:

$$y^2 - y - 2 = 0;$$
$$y_1 = 2, \quad y_2 = -1.$$

Но $y = \log_5 x$, значит, нам осталось решить два уравнения:

$$\log_5 x = 2;\ \ \log_5 x = -1.$$

Из первого уравнения находим $x = 5^2$, т. е. $x = 25$; из второго уравнения находим $x = 5^{-1}$, т. е. $x = \frac{1}{5}$.

Ответ: 25; $\frac{1}{5}$.

Пример 7. Решить уравнение $\log_x(3x^{\lg x} + 4) = 2\lg x$.

Решение. Воспользуемся определением логарифма:

$$x^{2\lg x} = 3x^{\lg x} + 4.$$

Целесообразно ввести новую переменную $y = x^{\lg x}$. Относительно новой переменной получаем существенно более простое уравнение: $y^2 = 3y + 4$. Находим корни последнего уравнения: $y_1 = -1$, $y_2 = 4$.

Поскольку $y = x^{\lg x}$, нам остаётся решить два уравнения: $x^{\lg x} = -1$ и $x^{\lg x} = 4$. Первое уравнение, поскольку $x > 0$, корней не имеет, а из второго последовательно получаем:

$$x^{\lg x} = 4;$$
$$\lg(x^{\lg x}) = \lg 4;$$
$$\lg x \cdot \lg x = \lg 4;$$
$$\lg^2 x = \lg 4;$$
$$\lg x = \pm\sqrt{\lg 4};$$
$$x = 10^{\pm\sqrt{\lg 4}}.$$

■

Пример 8. Решить систему уравнений

$$\begin{cases}\lg(2x - y) + 1 = \lg(y + 2x) + \lg 6,\\ 2\log_3(x - y) = \log_3(y + 2).\end{cases}$$

Решение. 1) Преобразуем первое уравнение системы к более простому виду:

$$\lg(2x - y) + \lg 10 = \lg(y + 2x) + \lg 6;$$
$$\lg(10(2x - y)) = \lg(6(y + 2x));$$
$$10(2x - y) = 6(y + 2x);$$
$$x = 2y.$$

2) Преобразуем второе уравнение системы к более простому виду:

$$\log_3(x - y)^2 = \log_3(y + 2);$$
$$(x - y)^2 = y + 2.$$

3) Решим полученную систему уравнений:

$$\begin{cases}x = 2y,\\ (x - y)^2 = y + 2.\end{cases}$$

Подставив $2y$ вместо x во второе уравнение, получим: $(2y - y)^2 = y + 2$; $y^2 = y + 2$; $y^2 - y - 2 = 0$; $y_1 = 2$, $y_2 = -1$.

Соответственно, из соотношения $x = 2y$ находим: $x_1 = 4$, $x_2 = -2$.

4) Осталось сделать проверку найденных пар (4; 2) и (−2; −1) с помощью условий, которые мы определяем, анализируя исходную систему уравнений:

$$\begin{cases} 2x - y > 0, \\ y + 2x > 0, \\ x - y > 0, \\ y + 2 > 0. \end{cases}$$

Пара (4; 2) удовлетворяет этим условиям, а пара (−2; −1) не удовлетворяет (например, она «не проходит» уже через первое условие $2x - y > 0$).

Ответ: (4; 2).

Вопросы для самопроверки

1. Можно ли утверждать, что уравнение $a^{f(x)} = a^{g(x)}$, где $a > 0$, $a \neq 1$, равносильно уравнению $f(x) = g(x)$?

2. Можно ли утверждать, что уравнение $\log_a f(x) = \log_a g(x)$, где $a > 0$, $a \neq 1$, равносильно уравнению $f(x) = g(x)$?

3. При каких условиях уравнение $\log_a f(x) = \log_a g(x)$, где $a > 0$, $a \neq 1$, равносильно уравнению $f(x) = g(x)$?

4. Перечислите основные методы решения логарифмических уравнений.

5. Сколько корней имеет уравнение $\log_2 x = \frac{1}{x}$? уравнение $\log_2 x = 3 - x$? Какое из этих уравнений вы можете решить устно?

§ 18. *Логарифмические неравенства*

Логарифмическими неравенствами называют неравенства вида

$$\log_a f(x) > \log_a g(x), \tag{1}$$

где a — положительное число, отличное от 1, и неравенства, сводящиеся к этому виду.

Для решения неравенства (1) преобразуем его к виду $\log_a f(x) - \log_a g(x) > 0$ и далее $\log_a \frac{f(x)}{g(x)} > 0$, т. е. $\log_a t > 0$, где $t = \frac{f(x)}{g(x)}$.

Теперь следует рассмотреть два случая: $a > 1$ и $0 < a < 1$.

Если $a > 1$, то неравенство $\log_a t > 0$ имеет место тогда и только тогда, когда $t > 1$ (см. § 15). Значит, $\frac{f(x)}{g(x)} > 1$, т. е. $f(x) > g(x)$, — мы учли, что $g(x) > 0$.

Если $0 < a < 1$, то неравенство $\log_a t > 0$ имеет место тогда и только тогда, когда $0 < t < 1$ (см. § 15). Значит, $0 < \frac{f(x)}{g(x)} < 1$, т. е. $f(x) < g(x)$, — мы учли, что $g(x) > 0$ и $f(x) > 0$.

Проведённые рассуждения позволяют сформулировать следующие утверждения.

Теорема 1. ***Пусть $a > 1$ и X — решение системы неравенств $\begin{cases} f(x) > 0, \\ g(x) > 0. \end{cases}$ Тогда неравенство $\log_a f(x) > \log_a g(x)$ равносильно на множестве X неравенству $f(x) > g(x)$.***

Теорема 2. ***Пусть $0 < a < 1$ и X — решение системы неравенств $\begin{cases} f(x) > 0, \\ g(x) > 0. \end{cases}$ Тогда неравенство $\log_a f(x) > \log_a g(x)$ равносильно на множестве X неравенству $f(x) < g(x)$.***

На практике эти теоремы применяют так: переходят от неравенства $\log_a f(x) > \log_a g(x)$ при $a > 1$ к равносильной ему системе неравенств

$$\begin{cases} f(x) > 0, \\ g(x) > 0, \\ f(x) > g(x), \end{cases}$$

а при $0 < a < 1$ — к равносильной системе неравенств

$$\begin{cases} f(x) > 0, \\ g(x) > 0, \\ f(x) < g(x). \end{cases}$$

Первые два неравенства каждой из этих систем определяют область допустимых значений переменной для неравенства (1), а знак последнего неравенства каждой из систем (обратите внимание!) либо совпадает со знаком неравенства (1) — в случае, когда $a > 1$, либо противоположен знаку неравенства (1) — в случае, когда $0 < a < 1$.

Пример 1. Решить неравенства:

а) $\log_3(2x - 4) > \log_3(14 - x)$;

б) $\log_{\frac{1}{3}}(2x - 4) > \log_{\frac{1}{3}}(14 - x)$.

Решение. а) Область допустимых значений переменной для заданного неравенства определяется условиями $2x - 4 > 0$ и $14 - x > 0$. Поскольку основанием логарифмов служит число 3, а оно больше 1, то, «освобождаясь» от знаков логарифмов, мы получим неравенство того же смысла $2x - 4 > 14 - x$.

В итоге получаем систему неравенств, равносильную заданному неравенству:

$$\begin{cases} 2x - 4 > 0, \\ 14 - x > 0, \\ 2x - 4 > 14 - x. \end{cases}$$

Из первого неравенства системы находим $x > 2$, из второго — $x < 14$, из третьего — $x > 6$. Геометрическая модель (рис. 73) помогает найти решение системы неравенств $6 < x < 14$.

б) Здесь основание логарифма, т. е. число $\frac{1}{3}$, меньше 1. Значит, заданное неравенство равносильно системе неравенств:

$$\begin{cases} 2x - 4 > 0, \\ 14 - x > 0, \\ 2x - 4 < 14 - x \end{cases}$$

(обратите внимание: знак последнего неравенства системы противоположен знаку исходного логарифмического неравенства).

Из первого неравенства системы находим $x > 2$, из второго — $x < 14$, из третьего — $x < 6$. Геометрическая модель (рис. 74) помогает найти решение системы неравенств: $2 < x < 6$.

Ответ: а) $6 < x < 14$; б) $2 < x < 6$.

Рассмотрим ещё раз систему неравенств, которая получилась в пункте а). Третье неравенство системы имеет вид $2x - 4 > 14 - x$, а второе — $14 - x > 0$. Но из этих двух неравенств автоматически (по свойству транзитивности неравенств) следует, что $2x - 4 > 0$. Что это значит? Это значит, что первое неравенство системы с самого начала можно было отбросить без всякого ущерба для решения системы.

Рассуждая аналогично, в системе неравенств, которую мы получили в пункте б), можно было с самого начала отбросить второе неравенство.

Получив систему неравенств, обычно смотрят, нет ли в ней неравенства, которое логически следует из других. Если такое

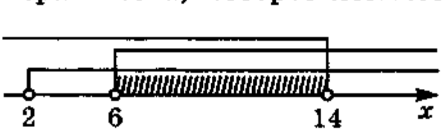


Рис. 73

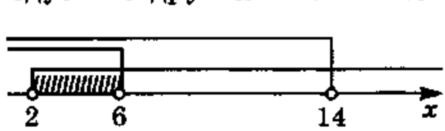


Рис. 74

неравенство есть, его можно отбросить. Советуем и вам так поступать, но, разумеется, только в том случае, если вы уверены в правильности своих выводов.

Пример 2. Решить неравенство $\log_{\frac{1}{2}}(16 + 4x - x^2) \leqslant -4$.

Решение. Представим -4 в виде логарифма по основанию $\frac{1}{2}$: $-4 = \log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^{-4} = \log_{\frac{1}{2}} 16$. Это позволит переписать заданное неравенство в виде $\log_{\frac{1}{2}}(16 + 4x - x^2) \leqslant \log_{\frac{1}{2}} 16$.

Учитывая, что здесь основанием логарифмов служит число, меньшее 1, составляем согласно теореме 2 равносильную заданному неравенству систему неравенств

$$\begin{cases} 16 + 4x - x^2 > 0, \\ 16 + 4x - x^2 \geqslant 16. \end{cases}$$

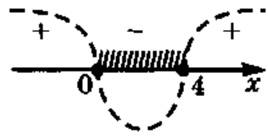


Рис. 75

Обратите внимание: если выполняется второе неравенство системы, то автоматически выполняется и первое неравенство (если $A \geqslant 16$, то тем более $A > 0$). Значит, первое неравенство системы можно отбросить. Решая второе неравенство, находим:

$$x^2 - 4x \leqslant 0;\ x(x - 4) \leqslant 0.$$

С помощью метода интервалов (рис. 75) получаем: $0 \leqslant x \leqslant 4$. ■

Пример 3. Решить неравенство

$$\lg x + \lg(45 - x) < 2 + \lg 2.$$

Решение. Имеем последовательно:

$$\lg x + \lg(45 - x) = \lg x(45 - x) = \lg(45x - x^2);$$
$$2 + \lg 2 = \lg 100 + \lg 2 = \lg 100 \cdot 2 = \lg 200.$$

Значит, заданное неравенство можно переписать так:

$$\lg(45x - x^2) < \lg 200.$$

Освобождаясь от знаков десятичных логарифмов, получим неравенство того же смысла: $45x - x^2 < 200$. А условия, задающие область допустимых значений переменной (внимание!), всегда определяют по исходному неравенству; в данном примере они таковы: $x > 0$ и $45 - x > 0$. В итоге получаем систему неравенств

$$\begin{cases} x > 0, \\ 45 - x > 0, \\ 45x - x^2 < 200. \end{cases}$$

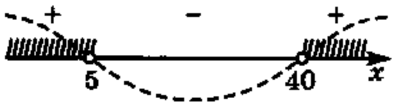


Рис. 76

Рис. 77

Первые два неравенства можно записать в виде двойного неравенства $0 < x < 45$. Решим третье неравенство системы:

$$x^2 - 45x + 200 > 0;$$
$$(x - 40)(x - 5) > 0;$$
$$x < 5,\ x > 40 \text{ (рис. 76).}$$

Отметив на числовой прямой это решение совместно с полученным ранее интервалом $0 < x < 45$, находим их пересечение (рис. 77), т. е. решение составленной выше системы неравенств: $0 < x < 5$; $40 < x < 45$. ■

Пример 4. Решить неравенство $\log_2^2 x^2 - 5\log_2 x + 1 \leqslant 0$.

Решение. Здесь «напрашивается» введение новой переменной $y = \log_2 x$, но сначала надо разобраться с выражением $\log_2^2 x^2$.

Имеем: $\log_2^2 x^2 = (\log_2 x^2)^2 = (2\log_2 x)^2 = 4\log_2^2 x$. Итак, если $y = \log_2 x$, то $\log_2^2 x^2 = 4y^2$. Поняв это, перепишем заданное неравенство так:

$$4y^2 - 5y + 1 \leqslant 0.$$

Найдём корни квадратного трёхчлена $4y^2 - 5y + 1$: $y_1 = 1$, $y_2 = \frac{1}{4}$. Значит, $4y^2 - 5y + 1 = 4(y - 1)\left(y - \frac{1}{4}\right)$, а потому последнее неравенство можно переписать в виде $4(y - 1)\left(y - \frac{1}{4}\right) \leqslant 0$.

Находим решение неравенства: $\frac{1}{4} \leqslant y \leqslant 1$.

Подставив вместо y выражение $\log_2 x$, получим: $\frac{1}{4} \leqslant \log_2 x \leqslant 1$, или, что то же самое, $\log_2 2^{\frac{1}{4}} \leqslant \log_2 x \leqslant \log_2 2$. Остаётся «освободиться» от знаков логарифмов, сохранив имеющиеся знаки неравенств: $2^{\frac{1}{4}} \leqslant x \leqslant 2$. ■

Пример 5. Решить неравенство

$$\log_{x-2}(2x - 3) > \log_{x-2}(24 - 6x). \qquad (1)$$

Решение. Если $x - 2 > 1$, то к неравенству (1) применима теорема 1, если же $0 < x - 2 < 1$, то к нему применима теорема 2.

Таким образом, решение неравенства (1) сводится к решению двух систем неравенств:

$$\begin{cases} x - 2 > 1, \\ 2x - 3 > 0, \\ 24 - 6x > 0, \\ 2x - 3 > 24 - 6x; \end{cases} \qquad \begin{cases} 0 < x - 2 < 1, \\ 2x - 3 > 0, \\ 24 - 6x > 0, \\ 2x - 3 < 24 - 6x. \end{cases}$$

Из первой системы получаем $3\frac{3}{8} < x < 4$, а из второй — $2 < x < 3$.

Ответ: $3\frac{3}{8} < x < 4$; $2 < x < 3$.

Пример 6. Решить неравенство

$$x^{\lg x} > 10. \qquad (2)$$

Решение. Неравенство (2) можно назвать показательно-логарифмическим. Выше мы отмечали, что при решении показательно-логарифмических уравнений целесообразно использовать метод логарифмирования обеих частей уравнения по одному и тому же основанию. Этот же метод можно применять и при решении показательно-логарифмических неравенств. Естественно, при логарифмировании обеих частей неравенства (как и уравнения) предварительно следует убедиться, что логарифмы существуют.

Знак полученного логарифмического неравенства останется таким же, каким он был до логарифмирования, если логарифмирование выполнялось по основанию $a > 1$; если же логарифмирование выполнялось по основанию $0 < a < 1$, то знак неравенства изменится на противоположный.

Вернёмся к неравенству (2). Обе его части принимают только положительные значения, и поэтому логарифмы этих частей существуют. Возьмём логарифмы по основанию 10. Так как $10 > 1$, то получим неравенство $\lg(x^{\lg x}) > \lg 10$ того же знака, что и неравенство (2), и равносильное ему.

После преобразований получим неравенство $\lg x \cdot \lg x > 1$, т. е. $\lg^2 x - 1 > 0$, откуда $\lg x < -1$ или $\lg x > 1$.

Из первого неравенства получаем $0 < x < 0{,}1$, а из второго — $x > 10$.

Ответ: $0 < x < 0{,}1$; $x > 10$.

Вопросы для самопроверки

1. Какое из двух утверждений верно, если $a > 1$, $f(x) > 0$, $g(x) > 0$:

а) неравенство $\log_a f(x) > \log_a g(x)$ равносильно неравенству $f(x) < g(x)$;

б) неравенство $\log_a f(x) > \log_a g(x)$ равносильно неравенству $f(x) > g(x)$?

2. Какое из двух утверждений верно, если $0 < a < 1$, $f(x) > 0$, $g(x) > 0$:

а) неравенство $\log_a f(x) \leqslant \log_a g(x)$ равносильно неравенству $f(x) \leqslant g(x)$;

б) неравенство $\log_a f(x) \leqslant \log_a g(x)$ равносильно неравенству $f(x) \geqslant g(x)$?

§ 19. Дифференцирование показательной и логарифмической функций

1. Число e. Функция $y = e^x$, её свойства, график, дифференцирование

Рассмотрим показательную функцию $y = a^x$, где $a > 1$. Для различных оснований a получаем различные графики (рис. 78, 79), но можно заметить, что все они проходят через точку (0; 1), все они имеют горизонтальную асимптоту $y = 0$ при $x \to -\infty$, все они обращены выпуклостью вниз и, наконец, все они имеют касательные во всех своих точках. Проведём для примера касательную к графику функции $y = 2^x$ в точке $x = 0$ (рис. 78). Если сделать точные построения и измерения, то можно убедиться в том, что эта касательная образует с осью x угол 35° (примерно). Теперь проведём касательную к графику функции $y = 3^x$ тоже в точке $x = 0$ (рис. 79, *а*). Здесь угол между касательной и осью x будет больше — 48°. А для показательной функции $y = 10^x$ в аналогичной ситуации получаем угол 66,5° (рис. 79, *б*).

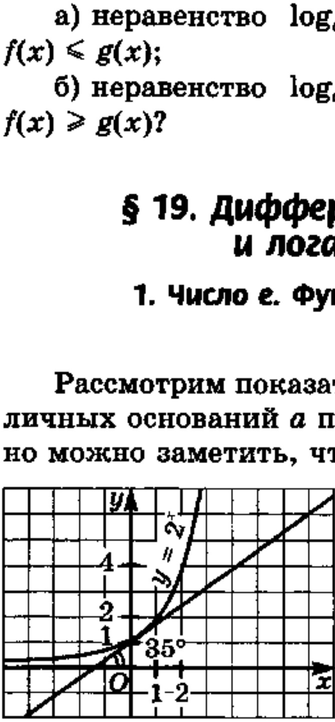
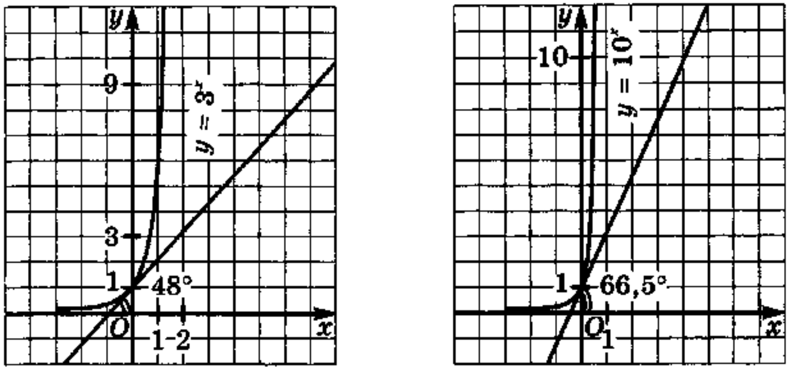


Рис. 78

Итак, если основание a показательной функции $y = a^x$ постепенно увеличивается от 2 до 10, то угол между касательной к графику функции в точке $x = 0$ и осью абсцисс постепенно увеличивается от 35° до 66,5°. Логично предположить, что существует основание a, для которого соответствующий угол равен 45°. Это основание должно быть заключено между числами 2 и 3, поскольку



а *б*

Рис. 79

для функции $y = 2^x$ интересующий нас угол равен 35°, что меньше чем 45°, а для функции $y = 3^x$ он равен 48°, что уже немного больше чем 45°. В курсе математического анализа доказано, что интересующее нас основание существует, его принято обозначать буквой e. Установлено, что число e — иррациональное, т. е. представляет собой бесконечную десятичную непериодическую дробь:

$$e = 2{,}7182818284590\ldots;$$

на практике обычно полагают, что $e \approx 2{,}7$.

Замечание (не очень серьёзное). Ясно, что Л. Н. Толстой никакого отношения к числу e не имеет, тем не менее в записи числа e, обратите внимание, два раза подряд повторяется число 1828 — год рождения Л. Н. Толстого.

График функции $y = e^x$ изображён на рис. 80. Это экспонента, отличающаяся от других экспонент (графиков показательных функций с другими основаниями) тем, что угол между касательной к графику в точке $x = 0$ и осью абсцисс равен 45°.

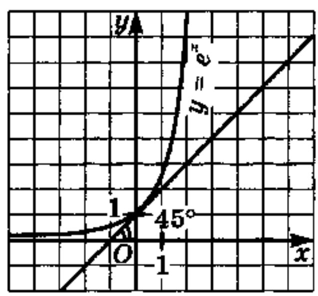


Рис. 80

Свойства функции $y = e^x$:

1) $D(f) = (-\infty; +\infty)$;
2) не является ни чётной, ни нечётной;
3) возрастает;
4) не ограничена сверху, ограничена снизу;
5) не имеет ни наибольшего, ни наименьшего значений;
6) непрерывна;
7) $E(f) = (0; +\infty)$;
8) выпукла вниз;
9) дифференцируема.

Вернитесь в § 11, взгляните на имеющийся там перечень свойств показательной функции $y = a^x$ при $a > 1$ (например, $y = 2^x$). Вы обнаружите те же свойства 1—8 (что вполне естественно), а девятое свойство, связанное с дифференцируемостью функции, мы тогда не упомянули. Обсудим его теперь.

Выведем формулу для отыскания производной функции $y = e^x$. При этом мы не будем пользоваться обычным алгоритмом, который не раз с успехом применяли в курсе алгебры и начал математического анализа 10-го класса. В этом алгоритме на заключительном этапе надо вычислить предел, а знания по теории пределов у нас с вами весьма и весьма ограниченные. Поэтому будем опираться на геометрические предпосылки, считая, в частности, сам факт существования касательной к графику показательной функции не подлежащим сомнению (поэтому мы так уверенно записали в приведённом выше перечне свойств девятое свойство — дифференцируемость функции $y = e^x$, хотя, конечно, строго доказать это нам не по силам, это делается в курсе высшей математики).

1. Отметим, что для функции $y = f(x)$, где $f(x) = e^x$, значение производной в точке $x = 0$ нам уже известно:

$$f'(0) = \operatorname{tg} 45^\circ = 1.$$

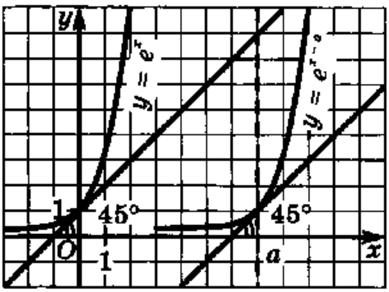


Рис. 81

2. Введём в рассмотрение функцию $y = g(x)$, где $g(x) = f(x - a)$, т. е. $g(x) = e^{x-a}$. На рис. 81 изображён график функции $y = g(x)$: он получен из графика функции $y = f(x)$ сдвигом по оси x на $|a|$ единиц масштаба. Касательная к графику функции $y = g(x)$ в точке $x = a$ параллельна касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке $x = 0$ (см. рис. 81), значит, она образует с осью x угол 45°. Используя геометрический смысл производной, можем записать, что $g'(a) = \operatorname{tg} 45^\circ = 1$.

3. Вернёмся к функции $y = f(x)$. Имеем:

$$f(x) = e^x = e^a \cdot e^{x-a} = e^a \cdot g(x).$$

Значит, $f'(x) = e^a \cdot g'(x)$, в частности, $f'(a) = e^a \cdot g'(a)$. Но $g'(a) = 1$, значит, $f'(a) = e^a$.

4. Мы установили, что для любого значения a справедливо соотношение $f'(a) = e^a$. Вместо буквы a можно, естественно, использовать и букву x; тогда получим, что $f'(x) = e^x$, т. е.

$$\boxed{(e^x)' = e^x.}$$

П р и м е р 1. Провести касательную к графику функции $y = e^x$ в точке $x = 1$.

Р е ш е н и е. Напомним, что уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке $x = a$ имеет вид

$$y = f(a) + f'(a)(x - a). \quad (1)$$

Воспользуемся алгоритмом составления уравнения касательной к графику функции, учитывая, что в данном примере $f(x) = e^x$.

1) $a = 1$.

2) $f(a) = f(1) = e$.

3) $f'(x) = e^x$; $f'(a) = f'(1) = e$.

4) Подставим найденные числа $a = 1$, $f(a) = e$, $f'(a) = e$ в формулу (1). Получим:

$$y = e + e(x - 1);$$
$$y = ex.$$

Ответ: $y = ex$.

П р и м е р 2. Вычислить значение производной функции $y = e^{4x-12}$ в точке $x = 3$.

Р е ш е н и е. Воспользуемся правилом дифференцирования функции $y = f(kx + m)$, согласно которому $y' = kf(kx + m)$, и тем, что $(e^x)' = e^x$. Получим:

$$y' = (e^{4x-12})' = 4e^{4x-12};$$
$$y'(3) = 4e^{12-12} = 4e^0 = 4.$$

Ответ: 4.

П р и м е р 3. Построить график функции $y = \sqrt{x} \cdot e^{-\frac{x}{2}}$.

Р е ш е н и е. Заметим сразу, что $D(f) = [0; +\infty)$ и что $y = 0$ только при $x = 0$, а при остальных значениях x функция принимает положительные значения. Кроме того, заданная функция непрерывна. Найдём её производную:

$$y' = (\sqrt{x} \cdot e^{-\frac{x}{2}})' = \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot e^{-\frac{x}{2}} + \sqrt{x} \cdot \left(-\frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{x}} - \sqrt{x}\right) = \frac{e^{-\frac{x}{2}}(1 - x)}{2\sqrt{x}}.$$

Производная обращается в нуль при $x = 1$, это точка максимума, причём $y_{\max} = \frac{1}{\sqrt{e}} \approx 0{,}6$. Чтобы правильно построить график функции, обратим внимание ещё на три обстоятельства: 1) в точке $x = 0$ производная не существует, график функции касается

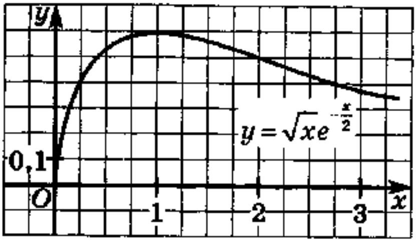


Рис. 82

оси ординат; 2) при увеличении x и числитель и знаменатель дроби $\frac{\sqrt{x}}{e^{\frac{x}{2}}}$ увеличиваются, но знаменатель растёт несравненно быстрее, значит, $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x}}{e^{\frac{x}{2}}} = 0$, а потому $y = 0$ — горизонтальная асимптота графика функции; 3) если $x = 2$, то $y \approx 0{,}5$. График изображён на рис. 82 (масштабы на осях различны).

Пример 4. Исследовать на экстремум и схематически изобразить график функции $y = x^2e^x$.

Решение. Имеем:

$$y' = (x^2e^x)' = (x^2)'e^x + x^2(e^x)' = 2xe^x + \\ + x^2e^x = xe^x(x + 2).$$

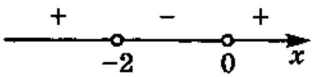


Рис. 83

Эта производная существует при всех значениях x, значит, критических точек у функции нет. Производная обращается в нуль в точках $x = 0$ и $x = -2$ — это две стационарные точки. Отметим их на числовой прямой. Знаки производной на полученных промежутках меняются так, как показано на рис. 83. Значит, $x = -2$ — точка максимума функции, причём

$$y_{\max} = y(-2) = (-2)^2 \cdot e^{-2} = \frac{4}{e^2} \approx 0{,}54;$$

$x = 0$ — точка минимума, причём

$$y_{\min} = y(0) = 0^2 \cdot e^0 = 0.$$

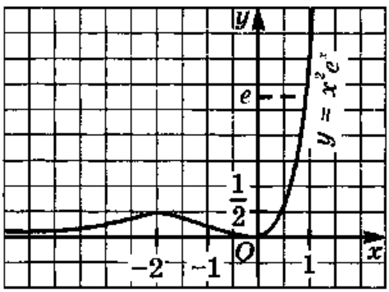


Рис. 84

Используя полученные точки экстремума, схематически изобразим график функции (рис. 84). Ось абсцисс — горизонтальная асимптота графика (при $x \to -\infty$). ■

2. Натуральные логарифмы. Функция y = ln x, её свойства, график, дифференцирование

Мы рассматривали логарифмы с различными основаниями: $\log_2 3$ — логарифм по основанию 2, $\log_5 7$ — логарифм по основанию 5, $\lg 2$ — логарифм по основанию 10 (десятичный логарифм) и т. д. Если основанием логарифма служит число e, то говорят, что задан *натуральный логарифм*.

Примеры натуральных логарифмов: $\log_e 2$, $\log_e 5$, $\log_e 0{,}2$ и т. д.

Подобно тому как для десятичных логарифмов введено специальное обозначение lg, введено специальное обозначение для натуральных логарифмов ln (l — логарифм, n — натуральный). Вместо $\log_e 2$ пишут $\ln 2$, вместо $\log_e 5$ пишут $\ln 5$ и т. д.

Используя известные соотношения для логарифмов (см. § 16), запишем ряд соотношений для натуральных логарифмов:

$$\ln 1 = 0; \quad \ln e = 1;$$

$$\ln e^r = r; \quad e^{\ln x} = x; \quad \log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}.$$

Мы знаем, что график логарифмической функции $y = \log_a x$ симметричен графику показательной функции $y = a^x$ относительно прямой $y = x$. Значит, и график функции $y = \ln x$ симметричен графику функции $y = e^x$ относительно прямой $y = x$ (рис. 85). Это экспонента, отличающаяся от других экспонент (графиков логарифмических функций с другими основаниями) тем, что угол между касательной к графику в точке $x = 1$ и осью абсцисс равен 45°.

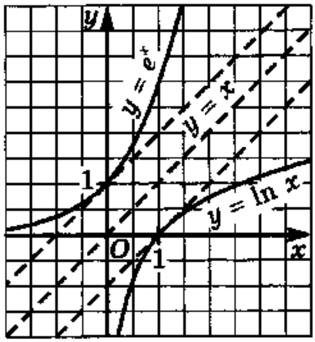


Рис. 85

Свойства функции $y = \ln x$:

1) $D(f) = (0; +\infty)$;

2) не является ни чётной, ни нечётной;

3) возрастает на $(0; +\infty)$;

4) не ограничена ни сверху, ни снизу;

5) не имеет ни наибольшего, ни наименьшего значений;

6) непрерывна;

7) $E(f) = (-\infty; +\infty)$;

8) выпукла вверх;

9) дифференцируема.

Вернёмся к § 15: взгляните на имеющийся там перечень свойств логарифмической функции $y = \log_a x$ при $a > 1$. Вы обнаружите те же свойства, кроме девятого — его мы тогда не упомянули.

Выведем формулу для производной функции $y = \ln x$. Эта функция является обратной по отношению к функции $x = e^y$. Значит, мы можем воспользоваться правилом дифференцирования обратной функции (см. «Алгебра и начала математического анализа–10», § 42), согласно которому $y'_x = \dfrac{1}{x'_y}$. Получим:

$$y'_x = (\ln x)' = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{(e^y)'} = \frac{1}{e^y} = \frac{1}{x}.$$

Таким образом, мы установили, что для любого значения $x > 0$ справедлива формула дифференцирования

$$\boxed{(\ln x)' = \frac{1}{x}.}$$

Пример 5. Доказать, что функция $y = \ln\cos x$ удовлетворяет соотношению $1 + (y')^2 = e^{-2y}$.

Решение. Воспользовавшись правилом дифференцирования сложной функции, найдём производную функции $y = \ln\cos x$:

$$y' = (\ln\cos x)' = \frac{1}{\cos x} \cdot (\cos x)' = \frac{1}{\cos x} \cdot (-\sin x) = -\operatorname{tg} x.$$

Значит, $1 + (y')^2 = 1 + \operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$.

Теперь поработаем с правой частью проверяемого соотношения: $e^{-2y} = \frac{1}{e^{2\ln\cos x}} = \frac{1}{e^{\ln\cos^2 x}} = \frac{1}{\cos^2 x}$. Таким образом, соотношение $1 + (y')^2 = e^{-2y}$ для заданной функции выполняется. ■

Пример 6. Из начала координат провести касательную к графику функции $y = \ln x$.

Решение. Сначала составим уравнение касательной в общем виде:

$$y = f(a) + f'(a)(x - a), \tag{2}$$

здесь $f(x) = \ln x$, а a — абсцисса точки касания, которая нам пока неизвестна.

Имеем: $f(a) = \ln a$, $f'(x) = \frac{1}{x}$, $f'(a) = \frac{1}{a}$. Значит, равенство (2) можно переписать так:

$$y = \ln a + \frac{1}{a}(x - a). \tag{3}$$

По условию прямая (3) проходит через начало координат. Подставив в формулу (3) значения $x = 0$, $y = 0$, получим $0 = \ln a + \frac{1}{a}(0 - a)$, т. е. $\ln a - 1 = 0$, откуда находим, что $a = e$. Осталось подставить найденное значение e вместо a в формулу (3):

$$y = \ln e + \frac{1}{e}(x - e);$$

$$y = 1 + \frac{x}{e} - 1;$$

$$y = \frac{x}{e}.$$

На рис. 86 изображён график функции $y = \ln x$, построена прямая $y = \frac{x}{e}$, проходящая через начало координат. Чертёж иллюстрирует полученный результат: построенная прямая касается графика функции $y = \ln x$ в точке $(e;\ 1)$.

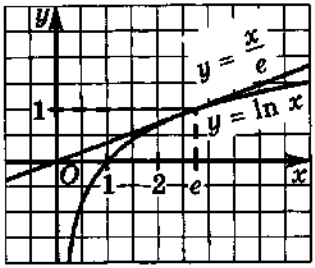


Рис. 86

Ответ: $y = \frac{x}{e}$.

Пример 7. Исследовать на экстремум функцию $y = \frac{\ln x}{x}$.

Решение.

$$y' = \left(\frac{\ln x}{x}\right)' = \frac{(\ln x)' \cdot x - \ln x \cdot (x)'}{x^2} = \frac{\frac{1}{x} \cdot x - \ln x \cdot 1}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2}.$$

Эта производная существует при всех значениях $x > 0$, т. е. при всех значениях x из области определения функции. Значит, критических точек у функции нет. Приравняв производную нулю, получим:

$$1 - \ln x = 0, \quad \ln x = 1, \quad x = e.$$

Это единственная стационарная точка. Если $x < e$, то $y' > 0$; если $x > e$, то $y' < 0$. Значит, $x = e$ — точка максимума функции, причём

$$y_{\max} = y(e) = \frac{\ln e}{e} = \frac{1}{e}.$$

Ответ: $x = e$ — точка максимума; $y_{\max} = \frac{1}{e}$.

Завершая параграф, получим формулы дифференцирования любой показательной и любой логарифмической функции.

Пусть дана показательная функция $y = a^x$. Воспользуемся тем, что $a = e^{\ln a}$ и, следовательно, $a^x = e^{x \ln a}$. Тогда

$$(a^x)' = (e^{x \ln a})' = \ln a \cdot e^{x \ln a} = \ln a \cdot a^x.$$

Итак,

$$\boxed{(a^x)' = a^x \ln a.}$$

Например, $(2^x)' = 2^x \ln 2$; $(5^x)' = 5^x \ln 5$ и т. д.

Пусть теперь дана логарифмическая функция $y = \log_a x$. Имеем:

$$y' = (\log_a x)' = \left(\frac{\ln x}{\ln a}\right)' = \frac{1}{\ln a} \cdot (\ln x)' = \frac{1}{\ln a} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{x \ln a}.$$

Итак,

$$\boxed{(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}.}$$

Вопросы для самопроверки

1. Запишите значение числа e с точностью до десятых; с точностью до сотых.

2. Какой угол образует с положительным направлением оси абсцисс касательная к графику функции $y = e^x$ в точке $x = 0$?

3. Чему равна производная функции $y = e^x$?

4. Что такое натуральный логарифм?

5. Как связаны между собой графики функций $y = e^x$ и $y = \ln x$?

6. Какая из функций $y = e^x$ и $y = \ln x$ выпукла вверх, а какая — выпукла вниз?

7. Есть ли асимптоты у графиков функций $y = e^x$ и $y = \ln x$? Если есть, то запишите их уравнения.

8. Чему равна производная функции $y = \ln x$?

9. Объясните, почему касательная к графику функции $y = \ln x$ в точке $x = 1$ составляет с положительным направлением оси абсцисс угол 45°.

10. Найдите производную функции:

а) $y = 2e^x + 3 \ln x$;   в) $y = e^{2x-3}$;

б) $y = e^x \cdot \ln x$;   г) $y = \ln \sin x$.

Исторические сведения

Применив свойства логарифмов, получим формулу $\lg(bq^n) = \lg b + n\lg q = a + nd$, которую можно истолковать так: при логарифмировании геометрическая прогрессия «превращается» в арифметическую. Тот факт, что умножению (делению) членов геометрической прогрессии $q, q^2, ..., q^n, ...$ соответствует сложение (вычитание) членов арифметической прогрессии $1, 2, ..., n, ...$ показателей их степеней, отмечался многими математиками древности. Например, это наблюдение имеется ещё у Архимеда (III в. до н. э.). Это же сопоставление явно есть в трудах Луки Пачоли (1445—1517), Николя Шюке (1445—1500) и Михаэля Штифеля (1487—1567). При этом Пачоли и Шюке действуют и с отрицательными показателями.

В XVI в. резко возросла значимость и необходимость проведения большого количества вычислительных операций в технических, астрономических, инженерных расчётах. Для их проведения составлялись многочисленные таблицы. Например, по квадратам чисел до 100 000 произведение xy находили по формуле $xy = 0{,}25((x + y)^2 - (x - y)^2)$. Швейцарский часовщик Йост Бюрги (1552—1632), сотрудничавший с Кеплером, и шотландский барон

Джон Непер (1550—1617) независимо друг от друга разработали таблицы, которые послужили прообразами современных логарифмических таблиц. Сам термин *logarithmus* принадлежит Неперу. Если Бюрги основывался на рассмотрении дискретных прогрессий, то Непер использовал кинематический подход, сравнивая характер двух разных способов движения, по существу вплотную подойдя к идее непрерывности и рассмотрению логарифмической функции.

Оба подхода заметно отличаются от современного. Например, в нынешних обозначениях логарифмы Непера вычисляются по формуле $\mathrm{Log\_Nep}(x) = 10^7 \cdot \ln\left(\frac{10^7}{x}\right)$. Последователь Непера, Генри Бригс (1562—1630), ввёл понятие десятичных логарифмов и к 1625 г. опубликовал их подробные четырнадцатизначные таблицы. Определение логарифма как показателя степени данного основания предлагал в 1685 г. английский математик Джон Валлис (1616—1703) и в 1694 г. швейцарский математик Иоганн Бернулли (1667—1748), но утвердилось это определение к середине XVIII в. после работ Эйлера, который и ввёл термин *«основание логарифма»*.

Неверно популярное утверждение о том, что именно Непер изобрёл натуральные логарифмы, как и преувеличением является слоган *«е — Неперово число»*. По крайней мере, и у Бюрги, и у Непера отсутствует даже само понятие *«основание»* логарифма. Название «натуральные логарифмы» стали применять после работ немецкого математика, астронома и инженера Николауса Меркатора (1620—1687), одного из создателей фонтанов Версаля, хотя первые таблицы таких логарифмов относят к 1618 г. Основание натуральных логарифмов обсуждал (1690) Лейбниц в письмах к Гюйгенсу, а в 1729 г. ещё один представитель швейцарского семейства математиков Даниил Бернулли (1700—1782) доказал, что $\lim\limits_{n \to \infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$ равен пределу процентного дохода в случае сложного начисления процентов. Обозначение *«е»* принадлежит Эйлеру, его связывают или с первыми буквами от *Euler, exponential* , или просто с тем, что e — первая буква после уже «занятых» a, b, c, d.

Значения показательных функций a^x при конкретных x есть частные случаи возведения в степень. Именно как функции показательные функции исторически были введены как обратные к логарифмическим, что первым сделал Лейбниц ок. 1690 г. После

«Введения в анализ бесконечно малых» (1748) Эйлера более принятым стал обратный порядок, когда первыми вводились именно показательные функции, а логарифмические определялись как обратные к ним. Кроме того, Эйлер определял эти (уже многозначные) функции и для комплексных переменных. Позже, в 1790 и в 1797 гг., метод был закреплён в книгах «Математические начала» португальца Жозе да Куньи (1744—1787) и «Теория аналитических функций» француза Жозефа Луи Лагранжа (1736—1813). Теория была построена на разложении функций в степенные ряды. Правила дифференцирования показательных и логарифмических функций известны в науке начиная с времён Лейбница и Ньютона.

ГЛАВА 4

Первообразная и интеграл

§ 20. Первообразная и неопределённый интеграл

1. Определение первообразной

В курсе алгебры и начал математического анализа 10-го класса мы, руководствуясь различными формулами и правилами, находили производную заданной функции и убедились в том, что производная имеет многочисленные применения: производная — это скорость движения, скорость протекания любого процесса (или, обобщая, скорость изменения функции), производная — это угловой коэффициент касательной к графику функции; с помощью производной можно исследовать функцию на монотонность и экстремумы; производная помогает решать задачи на оптимизацию.

Но в реальной жизни приходится решать и обратные задачи: например, наряду с задачей об отыскании скорости по известному закону движения встречается и задача о восстановлении закона движения по известной скорости. Рассмотрим одну из таких задач.

Пример 1. По прямой движется материальная точка, скорость её движения в момент времени t задаётся формулой $v = gt$. Найти закон движения.

Решение. Пусть $s = s(t)$ — искомый закон движения. Известно, что $s'(t) = v(t)$. Значит, для решения задачи нужно подобрать функцию $s = s(t)$, производная которой равна gt. Нетрудно догадаться, что $s(t) = \frac{gt^2}{2}$. В самом деле,

$$s'(t) = \left(\frac{gt^2}{2}\right)' = \frac{g}{2}(t^2)' = \frac{g}{2}\cdot 2t = gt.$$

Ответ: $s = \frac{gt^2}{2}$.

Сразу заметим, что пример решён верно, но неполно. Мы получили, что $s = \frac{gt^2}{2}$. На самом деле задача имеет бесконечно много решений: любая функция вида $s = \frac{gt^2}{2} + C$, где C — произвольная константа, может служить законом движения, поскольку

$$\left(\frac{gt^2}{2} + C\right)' = \left(\frac{gt^2}{2}\right)' + C' = gt + 0 = gt.$$

Чтобы задача стала более определённой, нам надо было зафиксировать исходную ситуацию: указать координату движущейся точки в какой-либо момент времени, например при $t = 0$. Если, скажем, $s(0) = s_0$, то из равенства $s(t) = \frac{gt^2}{2} + C$ получаем: $s(0) = 0 + C$, т. е. $C = s_0$. Теперь закон движения определён однозначно: $s = \frac{gt^2}{2} + s_0$.

В математике взаимно обратным операциям присваивают разные названия, придумывают специальные обозначения: например, возведение в квадрат (x^2) и извлечение квадратного корня $(\sqrt{x})$, синус ($\sin x$) и арксинус ($\arcsin x$) и т. д. Процесс отыскания производной по заданной функции называют *дифференцированием*, а обратную операцию, т. е. процесс отыскания функции по заданной производной, — *интегрированием*.

Сам термин «производная» можно обосновать «по-житейски»: функция $y = f(x)$ «производит на свет» новую функцию $y' = f'(x)$. Функция $y = f(x)$ выступает как бы в качестве «родителя», но математики, естественно, не называют её «родителем» или «производителем», они говорят, что это по отношению к функции $y' = f'(x)$ *первичный образ*, или *первообразная*.

Определение 1. Функцию $y = F(x)$ называют **первообразной для функции $y = f(x)$** на заданном промежутке X, если для любого $x \in X$ выполняется равенство $F'(x) = f(x)$.

На практике промежуток (или объединение промежутков) X обычно не указывают, но подразумевают (в качестве естественной области определения функции).

Приведём примеры.

1) Функция $y = x^2$ является первообразной для функции $y = 2x$, поскольку для всех x справедливо равенство $(x^2)' = 2x$.

2) Функция $y = x^3$ является первообразной для функции $y = 3x^2$, поскольку для всех x справедливо равенство $(x^3)' = 3x^2$.

3) Функция $y = \sin x$ является первообразной для функции $y = \cos x$, поскольку для всех x справедливо равенство $(\sin x)' = \cos x$.

4) Функция $y = \sqrt{x}$ является первообразной для функции $y = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ на промежутке $(0; +\infty)$, поскольку для всех $x > 0$ справедливо равенство $\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

Вообще, зная формулы для отыскания производных, нетрудно составить таблицу формул для отыскания первообразных:

Функция $y = f(x)$	Первообразная $y = F(x)$
0	C
1	x
$x^r,\ r \neq -1$	$\frac{x^{r+1}}{r+1}$
$\frac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert$
$\sin x$	$-\cos x$
$\cos x$	$\sin x$
$\frac{1}{\sin^2 x}$	$-\operatorname{ctg} x$
$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\operatorname{tg} x$
e^x	e^x
$a^x\ (a > 0,\ a \neq 1)$	$\frac{a^x}{\ln a}$

Надеемся, вы поняли, как составлена эта таблица: производная функции, которая записана во втором столбце, равна той функции, которая записана в соответствующей строке первого столбца (проверьте, не поленитесь, это очень полезно).

Например, для функции $y = x^5$ первообразной, как вы установите, служит функция $y = \frac{x^6}{6}$ (см. четвёртую строку таблицы).

Особого разговора заслуживает лишь пятая строка таблицы, в которой написано, что первообразной для $\frac{1}{x}$ является $\ln|x|$. Рассмотрим два возможных случая: 1) $x > 0$; 2) $x < 0$. Если $x > 0$, то $\ln|x| = \ln x$ и, следовательно, $(\ln|x|)' = (\ln x)' = \frac{1}{x}$. Если $x < 0$, то $\ln|x| = \ln(-x)$ и, следовательно, $(\ln|x|)' = (\ln(-x))' = \frac{1}{-x} \cdot (-1) = \frac{1}{x}$. Итак, для любого $x \neq 0$ выполняется равенство $(\ln|x|)' = \frac{1}{x}$, т. е. первообразной для функции $y = \frac{1}{x}$ является функция $y = \ln|x|$.

Замечание 1. Ниже мы докажем теорему о том, что если $y = F(x)$ — первообразная для функции $y = f(x)$, то у функции $y = f(x)$ бесконечно много первообразных и все они имеют вид $y = F(x) + C$. Поэтому правильнее было бы во втором столбце таблицы всюду, начиная с третьей строчки, добавить слагаемое C — произвольное действительное число.

Замечание 2. Ради краткости иногда вместо фразы «функция $y = F(x)$ является первообразной для функции $y = f(x)$» говорят: «$F(x)$ — первообразная для $f(x)$».

2. Правила отыскания первообразных

При отыскании первообразных, как и при отыскании производных, используются не только формулы (например, те, что указаны выше, в таблице), но и некоторые правила. Они непосредственно связаны с соответствующими правилами вычисления производных.

Мы знаем, что производная суммы равна сумме производных. Это правило порождает соответствующее правило отыскания первообразных.

ПРАВИЛО 1. *Первообразная суммы равна сумме первообразных.*

Обращаем ваше внимание на некоторую «легковесность» этой формулировки. На самом деле следовало бы сформулировать теорему: *если функции $y = f(x)$ и $y = g(x)$ имеют на промежутке X первообразные соответственно $y = F(x)$ и $y = G(x)$, то и сумма функций $y = f(x) + g(x)$ имеет на промежутке X первообразную, причём одной из этих первообразных является функция $y = F(x) + G(x)$.* Но обычно, формулируя правила (а не теоремы), оставляют только ключевые слова — так удобнее для применения правила на практике.

Пример 2. Найти первообразную для функции $y = 2x + \cos x$.

Решение. Первообразной для $2x$ служит x^2; первообразной для $\cos x$ служит $\sin x$. Значит, первообразной для функции $y = 2x + \cos x$ будет служить функция $y = x^2 + \sin x$ (и вообще любая функция вида $y = x^2 + \sin x + C$). ■

Мы знаем, что постоянный множитель можно вынести за знак производной. Это правило порождает соответствующее правило отыскания первообразных.

ПРАВИЛО 2. *Если $F(x)$ — первообразная для $f(x)$, то $kF(x)$ — первообразная для $kf(x)$.*

Пример 3. Найти первообразные для заданных функций:

а) $y = 5 \sin x$; б) $y = -\frac{\cos x}{3}$; в) $y = 12x^3 + 8x - 1$.

Решение. а) Первообразной для $\sin x$ служит $-\cos x$; значит, для функции $y = 5 \sin x$ первообразной будет функция $y = -5 \cos x$.

б) Первообразной для $\cos x$ служит $\sin x$; значит, для функции $y = -\frac{1}{3} \cos x$ первообразной будет функция $y = -\frac{1}{3} \sin x$.

в) Первообразной для x^3 служит $\frac{x^4}{4}$; первообразной для x служит $\frac{x^2}{2}$; первообразной для функции $y = 1$ служит функция $y = x$. Используя первое и второе правила отыскания первообразных, получим, что первообразной для функции $y = 12x^3 + 8x - 1$ служит функция $y = 12 \cdot \frac{x^4}{4} + 8 \cdot \frac{x^2}{2} - x$, т. е. $y = 3x^4 + 4x^2 - x$ (и вообще любая функция $y = 3x^4 + 4x^2 - x + C$). ■

Замечание 3. Как известно, производная произведения не равна произведению производных (правило дифференцирования произведения более сложное) и производная частного не равна частному от производных. Нет и правил для отыскания первообразной от произведения или первообразной от частного двух функций. Будьте внимательны!

Получим ещё одно правило отыскания первообразных. Мы знаем, что производная функции $y = f(kx + m)$ вычисляется по формуле

$$(f(kx + m))' = kf'(kx + m).$$

Это правило порождает соответствующее правило отыскания первообразных.

Теорема. ***Если $y = F(x)$ — первообразная для функции $y = f(x)$, то первообразной для функции $y = f(kx + m)$ служит функция $y = \frac{1}{k} F(kx + m)$.***

Доказательство. Имеем:

$$\left(\frac{1}{k} F(kx + m)\right)' = \frac{kF'(kx + m)}{k} = F'(kx + m) = f(kx + m).$$

Это и означает, что $y = \frac{1}{k}F(kx + m)$ является первообразной для функции $y = f(kx + m)$.

Смысл третьего правила заключается в следующем. Если вы знаете, что первообразной для $f(x)$ является $F(x)$, а вам нужно найти первообразную для $f(kx + m)$, то действуйте так: берите ту же самую функцию F, но вместо аргумента x подставьте выражение $kx + m$; кроме того, не забудьте перед знаком функции записать «поправочный множитель» $\frac{1}{k}$.

Пример 4. Найти первообразные для заданных функций:

а) $y = \frac{1}{5x - 6}$; б) $y = e^{\frac{2x}{3} + 1}$; в) $y = 2^{5 - 3x}$.

Решение. а) Первообразной для $\frac{1}{x}$ является $\ln|x|$, значит, для заданной функции $y = \frac{1}{5x - 6}$ первообразной будет функция $y = \frac{1}{5}\ln|5x - 6|$.

б) Первообразной для e^x является e^x, значит, для заданной функции $y = e^{\frac{2x}{3} + 1}$ первообразной будет функция $y = \frac{1}{\frac{2}{3}} \cdot e^{\frac{2x}{3} + 1}$, т. е. $y = \frac{3}{2} \cdot e^{\frac{2x}{3} + 1}$.

в) Первообразной для 2^x является $\frac{2^x}{\ln 2}$, значит, для заданной функции $y = 2^{5 - 3x}$ первообразной будет функция $y = \frac{1}{-3} \cdot \frac{2^{5 - 3x}}{\ln 2}$, т. е. $y = -\frac{2^{5 - 3x}}{3 \ln 2}$. ■

3. Неопределённый интеграл

Выше мы уже отмечали, что задача отыскания первообразной для заданной функции $y = f(x)$ имеет не одно решение. Обсудим этот вопрос более детально.

Теорема. ***Если $y = F(x)$ — первообразная для функции $y = f(x)$ на промежутке X, то у функции $y = f(x)$ бесконечно много первообразных и все они имеют вид $y = F(x) + C$.***

Доказательство. 1. Пусть $y = F(x)$ — первообразная для функции $y = f(x)$ на промежутке X. Это значит, что для всех x

из X выполняется равенство $F'(x) = f(x)$. Найдём производную любой функции вида $y = F(x) + C$:

$$(F(x) + C)' = F'(x) + C' = f(x) + 0 = f(x).$$

Итак, $(F(x) + C)' = f(x)$. Это значит, что $y = F(x) + C$ является первообразной для функции $y = f(x)$.

Таким образом, мы доказали, что если у функции $y = f(x)$ есть первообразная $y = F(x)$, то у функции $y = f(x)$ бесконечно много первообразных: например, любая функция вида $y = F(x) + C$ является первообразной.

2. Докажем теперь, что указанным видом функций исчерпывается всё множество первообразных.

Пусть $y = F_1(x)$ и $y = F(x)$ — две первообразные для функции $y = f(x)$ на промежутке X. Это значит, что для всех x из X выполняются соотношения $F_1'(x) = f(x)$ и $F'(x) = f(x)$.

Рассмотрим функцию $y = H(x)$, где $H(x) = F_1(x) - F(x)$, и найдём её производную:

$$(H(x))' = (F_1(x) - F(x))' = F_1'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0.$$

Известно, что если производная функции $y = H(x)$ на промежутке X тождественно равна нулю, то функция постоянна на промежутке X. Значит, $H(x) = C$, т. е. $F_1(x) - F(x) = C$, $F_1(x) = F(x) + C$.

Теорема доказана.

Пример 5. Задан закон зависимости скорости от времени $v = -5\sin 2t$. Найти закон движения $s = s(t)$, если известно, что в момент времени $t = 0$ координата точки равнялась числу 1,5 (т. е. $s(0) = 1{,}5$).

Решение. Так как скорость — производная координаты как функции от времени, то нам прежде всего нужно найти первообразную для скорости, т. е. первообразную для функции $v = -5 \sin 2t$. Одной из таких первообразных является функция $s = -5 \cdot \frac{1}{2} \cdot (-\cos 2t)$, т. е. $s = 2{,}5 \cos 2t$, а все первообразные имеют вид:

$$s = 2{,}5 \cos 2t + C. \qquad (1)$$

Чтобы найти значение постоянной C, воспользуемся начальными условиями, согласно которым $s(0) = 1{,}5$. Подставив в формулу (1) значения $t = 0$, $s = 1{,}5$, получим:

$$1{,}5 = 2{,}5 \cos 0 + C;$$
$$1{,}5 = 2{,}5 + C;$$
$$C = -1.$$

Подставив найденное значение C в формулу (1), получим интересующий нас закон движения:

$$s = 2{,}5 \cos 2t - 1.$$ ■

Определение 2. Если функция $y = f(x)$ имеет на промежутке X первообразную $y = F(x)$, то множество всех первообразных, т. е. множество функций вида $y = F(x) + C$, называют **неопределённым интегралом от функции** $y = f(x)$ и обозначают

$$\int f(x)dx$$

(читают: *неопределённый интеграл эф от икс дэ икс*).

В следующем параграфе мы выясним, в чём состоит скрытый смысл указанного обозначения.

Опираясь на имеющуюся в этом параграфе таблицу первообразных, составим таблицу основных неопределённых интегралов:

$\int dx = x + C$
$\int x^r dx = \frac{x^{r+1}}{r+1} + C\,(r \neq -1)$
$\int \frac{dx}{x} = \ln\lvert x\rvert + C$
$\int \sin x = -\cos x + C$
$\int \cos x = \sin x + C$
$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$
$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$
$\int e^x dx = e^x + C$
$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a}\,(a > 0,\ a \neq 1)$

Опираясь на приведённые выше три правила отыскания первообразных, мы можем сформулировать соответствующие правила интегрирования.

ПРАВИЛО 1. *Интеграл от суммы функций равен сумме интегралов этих функций:*

$$\int(f(x) + g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx.$$

Формулировка весьма проста, но в ней заложен отнюдь не тривиальный смысл. Ведь интеграл — это множество первообразных. Если дословно прочитать формулу, то получается, что речь идёт об арифметических операциях над множествами. Какой же в это вкладывается смысл? Смысл такой: если взять любую первообразную из множества $\int f(x)dx$ и сложить её с любой первообразной из множества $\int g(x)dx$, то в сумме получится функция, являющаяся элементом множества $\int(f(x) + g(x))dx$.

ПРАВИЛО 2. *Постоянный множитель можно вынести за знак интеграла:*

$$\int kf(x)dx = k\int f(x)dx.$$

ПРАВИЛО 3. *Если* $\int f(x)dx = F(x) + C$, *то*

$$\int f(kx + m)dx = \frac{F(kx + m)}{k} + C.$$

Пример 6. Найти неопределённые интегралы:

а) $\int\left(\frac{3}{\sqrt{x}} - \frac{5}{x^2}\right)dx$; б) $\int\frac{dx}{\cos^2\left(3x - \frac{\pi}{3}\right)}$; в) $\int\sin^2 x\,dx$.

Решение. а) Воспользовавшись первым и вторым правилами интегрирования, получим: $\int\left(\frac{3}{\sqrt{x}} - \frac{5}{x^2}\right)dx = 3\int\frac{dx}{\sqrt{x}} - 5\int\frac{dx}{x^2}$.

Теперь воспользуемся формулами интегрирования:

$$3\int\frac{dx}{\sqrt{x}} - 5\int\frac{dx}{x^2} = 3 \cdot 2\sqrt{x} - 5 \cdot \left(\frac{-1}{x}\right) + C.$$

В итоге

$$\int\left(\frac{3}{\sqrt{x}} - \frac{5}{x^2}\right)dx = 6\sqrt{x} + \frac{5}{x} + C.$$

б) Воспользовавшись третьим правилом интегрирования и формулой $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$, получим:

$$\int \frac{dx}{\cos^2\left(3x - \frac{\pi}{3}\right)} = \frac{1}{3}\operatorname{tg}\left(3x - \frac{\pi}{3}\right) + C.$$

в) Для непосредственного нахождения заданного интеграла у нас нет ни соответствующей формулы в таблице, ни соответствующего правила. В подобных случаях иногда помогают предварительно выполненные тождественные преобразования выражения, содержащегося под знаком интеграла.

Воспользовавшись тригонометрической формулой понижения степени $\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$, получим:

$$\int \sin^2 x\, dx = \int \frac{1 - \cos 2x}{2} dx = \frac{1}{2}\int (1 - \cos 2x) dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int dx - \frac{1}{2}\int \cos 2x\, dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\sin 2x\right) + C =$$

$$= \frac{x}{2} - \frac{1}{4}\sin 2x + C.$$ ■

Вопросы для самопроверки

1. Что называют первообразной для функции $y = f(x)$?

2. Укажите по две первообразных для каждой из следующих функций: а) $y = x^3$; б) $y = \sqrt{x}$; в) $y = \frac{1}{x}$; г) $y = \sin x$; д) $y = \cos x$; е) $y = e^x$.

3. Какие из приведённых ниже утверждений о двух функциях, имеющих первообразные, верны, а какие — нет:

а) первообразная суммы равна сумме первообразных;

б) первообразная произведения равна произведению первообразных;

в) первообразная разности равна разности первообразных;

г) первообразная частного равна частному первообразных?

4. Какое из приведённых ниже утверждений верно, а какое — нет: а) если $y = F(x)$ — первообразная для функции $y = f(x)$, то $y = kF(kx + b)$ — первообразная для функции $y = f(kx + b)$; б) если $y = F(x)$ — первообразная для функции $y = f(x)$, то $y = \frac{1}{k}F(kx + b)$ — первообразная для функции $y = f(kx + b)$?

5. Напишите общий вид всех первообразных для функции $y = f(x)$, если известно, что $F(x)$ — одна из первообразных.

6. Найдите множество первообразных для каждой из следующих функций:

а) $y = \frac{3}{x^2}$; г) $y = \frac{5}{\sin^2 x} - \frac{4}{\cos^2 x}$;

б) $y = 2 \sin x - 3 \cos x$; д) $y = \frac{1}{3x - 7}$;

в) $y = e^{5x}$; е) $y = (1 - 5x)^{\frac{2}{3}}$.

7. Что такое неопределённый интеграл от функции $y = f(x)$?

§ 21. Определённый интеграл

1. Задачи, приводящие к понятию определённого интеграла

Задача 1 (*о вычислении площади криволинейной трапеции*).

В декартовой прямоугольной системе координат xOy дана фигура, ограниченная осью x, прямыми $x = a$, $x = b$ $(a < b)$ и графиком непрерывной и неотрицательной на отрезке $[a; b]$ функции $y = f(x)$; назовём эту фигуру *криволинейной трапецией* (рис. 87). Требуется вычислить площадь криволинейной трапеции.

Решение. Геометрия даёт нам рецепты для вычисления площадей многоугольников и некоторых частей круга (сектора, сегмента). Используя геометрические соображения, мы сумеем найти лишь приближённое значение искомой площади, рассуждая следующим образом.

Разобьём отрезок $[a; b]$ (основание криволинейной трапеции) на n равных частей; это разбиение осуществим с помощью точек $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_k, x_{k+1}, \ldots, x_{n-1}$. Из этих точек восставим перпендикуляры к оси x до пересечения с графиком функции $y = f(x)$. Тогда заданная криволинейная трапеция разобьётся на n частей — на n узеньких столбиков. Площадь всей трапеции равна сумме площадей столбиков.

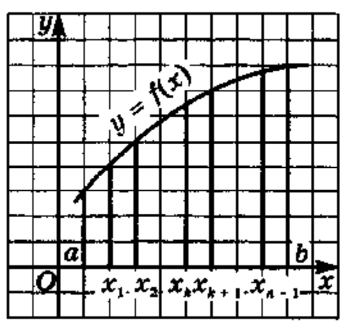


Рис. 87

Рассмотрим отдельно k-й столбик, т. е. криволинейную трапецию, основанием которой служит отрезок $[x_k; x_{k+1}]$. Заменим его прямоугольником с тем же основанием и высотой, равной $f(x_k)$ (рис. 88). Площадь прямоугольника равна $f(x_k)\Delta x_k$, где $\Delta x_k = x_{k+1} - x_k$ — длина

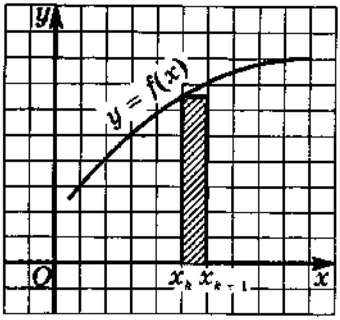


Рис. 88

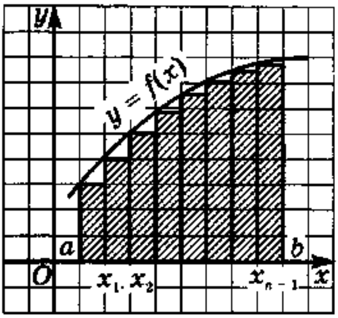


Рис. 89

отрезка $[x_k; x_{k+1}]$; естественно считать составленное произведение приближённым значением площади k-го столбика.

Если теперь сделать то же самое со всеми остальными столбиками, то придём к следующему результату: площадь S заданной криволинейной трапеции приближённо равна площади S_n ступенчатой фигуры, составленной из n прямоугольников (рис. 89):

$$S_n = f(x_0)\Delta x_0 + f(x_1)\Delta x_1 + f(x_2)\Delta x_2 + \ldots + f(x_k)\Delta x_k + \ldots + f(x_{n-1})\Delta x_{n-1}.$$

Здесь ради единообразия обозначений считаем, что $a = x_0$, $b = x_n$; Δx_0 — длина отрезка $[x_0; x_1]$, Δx_1 — длина отрезка $[x_1; x_2]$ и т. д.; при этом, как мы условились выше,

$$\Delta x_0 = \Delta x_1 = \Delta x_2 = \ldots = \Delta x_{n-1}.$$

Итак, $S \approx S_n$, причём это приближённое равенство тем точнее, чем больше n.

Искомая площадь криволинейной трапеции равна пределу последовательности (S_n):

$$\boxed{S = \lim_{n \to \infty} S_n.}$$

Задача 2 (*о вычислении массы стержня*).

Дан прямолинейный неоднородный стержень $[a; b]$ (рис. 90), плотность в точке x вычисляется по формуле $p = p(x)$. Найти массу стержня.

Решение. Масса m тела, как известно из курса физики, равна произведению плотности p на объём V (вместо объёма берут площадь, если речь идёт о плоской пластине; вместо объёма берут длину, если речь идёт о прямолинейном стержне без учёта его толщины). Но этот закон действует только для однородных тел, т. е. в тех случаях, когда плотность постоянна. Для неоднородного стержня используется тот же метод, что был применён при решении задачи 1.

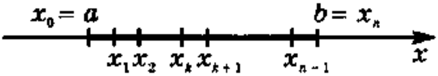


Рис. 90

1) Разобьём отрезок $[a; b]$ на n равных частей.

2) Рассмотрим k-й участок $[x_k; x_{k+1}]$ и будем считать, что плотность во всех точках этого участка постоянна, а имен-

но такая, как, например, в точке x_k. Итак, мы считаем, что $p = p(x_k)$.

3) Найдём приближённое значение массы k-го участка, это приближённое значение обозначим m_k:

$$m_k = p(x_k)\Delta x_k,$$

где Δx_k, как и в предыдущей задаче, — длина отрезка $[x_k;\ x_{k+1}]$.

4) Найдём приближённое значение массы стержня:

$$m \approx S_n,$$

где $S_n = m_0 + m_1 + m_2 + \ldots + m_k + \ldots + m_{n-1} = p(x_0)\Delta x_0 + p(x_1)\Delta x_1 + p(x_2)\Delta x_2 + \ldots + p(x_{n-1})\Delta x_{n-1}$.

5) Искомая масса равна пределу последовательности (S_n):

$$\boxed{m = \lim_{n \to \infty} S_n.}$$

Задача 3 (*о перемещении точки*).

По прямой движется материальная точка. Зависимость скорости от времени выражается формулой $v = v(t)$. Найти перемещение точки за промежуток времени $[a;\ b]$.

Решение. Если бы движение было равномерным, то задача решалась бы очень просто: $s = vt$, т. е. $s = v(b - a)$. Для неравномерного движения приходится использовать те же идеи, на которых было основано решение двух предыдущих задач.

1) Разделим промежуток времени $[a;\ b]$ на n равных частей.

2) Рассмотрим промежуток времени $[t_k;\ t_{k+1}]$ и будем считать, что в этот промежуток времени скорость была постоянной, такой, как в момент времени t_k. Итак, мы считаем, что $v = v(t_k)$.

3) Найдём приближённое значение перемещения точки за промежуток времени $[t_k;\ t_{k+1}]$, это приближённое значение обозначим s_k:

$$s_k = v(t_k)\Delta t_k.$$

4) Найдём приближённое значение перемещения s:

$$s \approx S_n,$$

где $S_n = s_0 + s_1 + s_2 + \ldots + s_k + \ldots + s_{n-1} = v(t_0)\Delta t_0 + v(t_1)\Delta t_1 + v(t_2)\Delta t_2 + \ldots + v(t_{n-1})\Delta t_{n-1}$.

5) Искомое перемещение равно пределу последовательности (S_n):

$$\boxed{s = \lim_{n \to \infty} S_n.}$$

Подведём итоги. Решение трёх различных задач привело к одной и той же математической модели. Многие задачи из различных областей науки и техники приводят в процессе решения к такой же модели. Значит, данную математическую модель надо специально изучить, т. е.:

а) присвоить ей новый термин,

б) ввести для неё обозначение,

в) научиться с ней работать.

Этим и займёмся.

2. Понятие определённого интеграла

Дадим математическое описание той модели, которая была построена в трёх рассмотренных задачах, для функции $y = f(x)$, определённой (но необязательно неотрицательной, как это предполагалось в рассмотренных задачах) на отрезке $[a; b]$:

1) разбивают отрезок $[a; b]$ на n равных частей;

2) составляют сумму:

$$S_n = f(x_0)\Delta x_0 + f(x_1)\Delta x_1 + f(x_2)\Delta x_2 + \\ + \ldots + f(x_k)\Delta x_k + \ldots + f(x_{n-1})\Delta x_{n-1};$$

3) вычисляют $\lim\limits_{n \to \infty} S_n$.

В курсе математического анализа доказано, что этот предел в случае непрерывной или в случае кусочно-непрерывной функции $y = f(x)$ существует. Его называют **определённым интегралом от функции $y = f(x)$ по отрезку $[a; b]$** и обозначают так:

$$\int_a^b f(x)dx$$

(читают: *интеграл от а до b эф от икс дэ икс*). Числа a и b называют **пределами интегрирования** (соответственно *нижним* и *верхним*).

Замечание 1. Приведём правдоподобную версию происхождения указанных обозначения и термина: $\int$ — стилизованная буква S (*summa*); $f(x)dx$ — напоминание о слагаемых вида $f(x_k)\Delta x_k$, из которых состоит сумма S_n. Само слово *интеграл* происходит от английского слова *integer* — «целый». Употребление этого термина вполне оправданно: вспомните, какой смысл вкладывается в русском языке в слово *интеграция* — восстановление, восполнение, воссоединение; подробнее — это процесс, ведущий к состоянию связанности отдельных частей в целое. В построенной математической модели речь фактически идёт о воссоединении целого по отдельным частям (например, о нахождении всей площади по площадям столбиков, как было в задаче 1).

Вернёмся к трём рассмотренным выше задачам. Определение площади, данное в задаче 1, теперь можно переписать следующим образом:

$$\boxed{S = \int_a^b f(x)dx,}$$

здесь S — площадь криволинейной трапеции, изображённой на рис. 87. В этом состоит *геометрический смысл определённого интеграла*.

Определение массы m неоднородного стержня с плотностью $p(x)$ (рис. 90), данное в задаче 2, можно переписать так:

$$\boxed{m = \int_a^b p(x)dx.}$$

В этом состоит *физический смысл определённого интеграла*.

Наконец, определение перемещения s точки, движущейся по прямой со скоростью $v = v(t)$, за промежуток времени от $t = a$ до $t = b$, данное в задаче 3, можно переписать так:

$$\boxed{s = \int_a^b v(t)dt.}$$

Это ещё одно физическое истолкование определённого интеграла.

3. Формула Ньютона — Лейбница

После внимательного изучения предыдущего параграфа у вас, наверное, возник вопрос: почему в названии построенной математической модели содержится слово «интеграл», ведь в § 20 это слово ассоциировалось с термином «первообразная» (неопределённый интеграл — множество первообразных)? Есть ли какая-либо связь между определённым интегралом и первообразной?

Ключ к разгадке даёт задача 3. С одной стороны, перемещение s точки, движущейся по прямой со скоростью $v = v(t)$, за промежуток времени от $t = a$ до $t = b$ вычисляется по формуле

$$s = \int_a^b v(t)dt.$$

С другой стороны, координата движущейся точки есть первообразная для скорости — обозначим её $s(t)$; значит, перемещение s выражается формулой $s = s(b) - s(a)$. В итоге получаем:

$$\int_a^b v(t)dt = s(b) - s(a),$$

где $s(t)$ — первообразная для $v(t)$.

Вернёмся к задаче 1 — о вычислении площади криволинейной трапеции (см. рис. 87). Мы установили, что

$$S = \int_a^b f(x)dx. \qquad (1)$$

Сейчас мы покажем другое решение этой задачи, которое приведёт нас к формуле

$$S = F(b) - F(a),$$

где $F(x)$ — первообразная для $f(x)$. Будем считать для упрощения, что $y = f(x)$ — возрастающая функция на отрезке $[a; b]$.

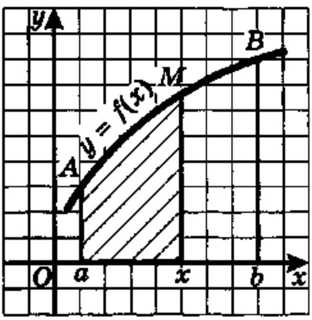


Рис. 91

Выберем между a и b на оси абсцисс фиксированную точку x и рассмотрим криволинейную трапецию $aAMx$ (рис. 91), обозначим её площадь через $S(x)$. Каждому x из отрезка $[a; b]$ соответствует вполне определённое значение $S(x)$, т. е. можно говорить о функции $u = S(x)$. Эта функция определена на отрезке $[a; b]$, она неотрицательна и возрастает (чем больше x, тем большую площадь имеет криволинейная трапеция $aAMx$).

Особо отметим значения функции на концах отрезка $[a; b]$:

если $x = a$, то трапеция $aAMx$ «вырождается» в отрезок aA, его площадь равна нулю, т. е. $S(a) = 0$;

если $x = b$, то трапеция $aAMx$ совпадает с трапецией $aABb$, площадь S которой нам как раз и надо вычислить, т. е. $S(b) = S$.

Вся подготовительная работа закончена, приступим к решению задачи о вычислении площади криволинейной трапеции $aABb$. Осуществим это решение в два этапа.

Первый этап. Найдём производную функции $u = S(x)$, применив известный алгоритм.

1) Для фиксированного значения x имеем: $S(x) = S_{aAMx}$.

2) Дадим аргументу приращение Δx (пусть для определённости выполняется неравенство $\Delta x > 0$). Для значения $p = x + \Delta x$ имеем (рис. 92):

$$S(x + \Delta x) = S_{aAPp}.$$

3) $\Delta u = S(x + \Delta x) - S(x) = S_{xMPp}$ — площадь узенького столбика $xMPp$ на рис. 92.

4) Функция $y = f(x)$ возрастает на отрезке $[x; x + \Delta x]$, значит, $f(x)$ — наименьшее значение функции на указанном отрезке, а $f(x + \Delta x)$ — наибольшее значение функции на указанном отрезке. Но тогда $f(x)\Delta x$ — площадь прямоугольника, лежащего внутри столбика $xMPp$, а потому $f(x)\Delta x < \Delta u$; $f(x + \Delta x)\Delta x$ — площадь прямоугольника, содержащего внутри себя столбик $xMPp$, а потому $\Delta u < f(x + \Delta x)(\Delta x)$.

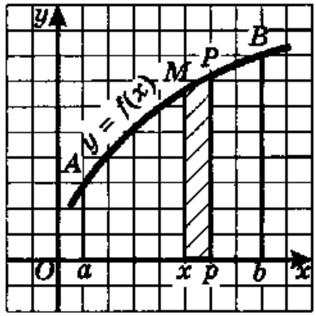


Рис. 92

Итак, $f(x)\Delta x < \Delta u < f(x + \Delta x)\Delta x$. Учтя, что $\Delta x > 0$, получим:

$$f(x) < \frac{\Delta u}{\Delta x} < f(x + \Delta x). \qquad (2)$$

5) Если $\Delta x \to 0$, то в силу непрерывности функции $y = f(x)$ в точке x $f(x + \Delta x) \to f(x)$. Анализируя неравенство (2), логично предположить, что тогда и $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = f(x)$ (в курсе математического анализа доказано, что это верно). Но, как известно, $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = u' = S'(x)$. Таким образом,

$$S'(x) = f(x).$$

Иными словами, $S(x)$ — первообразная для $f(x)$.

<u>Второй этап.</u> Приступая к решению задачи, мы для $f(x)$ выбрали первообразную $F(x)$. Значит, теперь у нас есть две первообразные для $f(x)$ — это $F(x)$ и $S(x)$. Они, как известно, отличаются друг от друга на постоянную величину, т. е.

$$S(x) = F(x) + C.$$

Далее имеем:

$$\begin{array}{r} -\begin{array}{r} S(b) = F(b) + C, \\ S(a) = F(a) + C. \end{array} \\ \hline S(b) - S(a) = F(b) - F(a). \end{array}$$

Но, как мы отметили выше, $S(b) = S$, $S(a) = 0$, значит, $S(b) - S(a) = S$, т. е. $S = F(b) - F(a)$.

Сопоставив этот результат с формулой (1), получим:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

В курсе математического анализа доказана следующая теорема.

Теорема. ***Если функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$, то справедлива формула***

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a),$$

где $F(x)$ — первообразная для $f(x)$.

Приведённую формулу обычно называют ***формулой Ньютона — Лейбница*** в честь английского физика Исаака Ньютона (1643—1727) и немецкого философа Готфрида Лейбница (1646—1716), получивших её независимо друг от друга и практически одновременно.

Замечание 2. Обратите внимание на то, что две разные формализации геометрически очевидного понятия площади (одна — через дискретные разбиения, другая — через первообразные) дали одинаковый результат, привели к нетривиальной формуле Ньютона — Лейбница.

Замечание 3. В формулировке теоремы следовало бы добавить условие существования первообразной $F(x)$ для $f(x)$. Но в курсе математического анализа доказано, что у функции $y = f(x)$, непрерывной на промежутке X, всегда есть первообразная. Поэтому указанное выше условие мы в формулировку теоремы не включили.

На практике вместо записи $F(b) - F(a)$ используют запись $F(x)\Big|_a^b$ (её называют иногда *двойной подстановкой*) и, соответственно, переписывают формулу Ньютона — Лейбница так:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b.$$

Вычисляя определённый интеграл, сначала находят первообразную подынтегральной функции $y = f(x)$, а затем осуществляют двойную подстановку.

Пример 1. Вычислить $\int_{-1}^{3} x^3\,dx$.

Решение. Первообразной для x^3 служит $\frac{x^4}{4}$. Значит,

$$\int_{-1}^{3} x^3\,dx = \frac{x^4}{4}\Big|_{-1}^{3} = \frac{3^4}{4} - \frac{(-1)^4}{4} = \frac{81}{4} - \frac{1}{4} = 20. \qquad \blacksquare$$

Пример 2. Вычислить $\int\limits_1^2 \frac{3x^4 + x^3 + 2x^2 + 1}{x^2}dx$.

Решение. Сначала найдём неопределённый интеграл:

$$\int \frac{3x^4 + x^3 + 2x^2 + 1}{x^2}dx = \int\left(3x^2 + x + 2 + \frac{1}{x^2}\right)dx =$$

$$= 3\int x^2\,dx + \int x\,dx + 2\int dx + \int \frac{1}{x^2}dx = 3\cdot\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 2x - \frac{1}{x} + C =$$

$$= x^3 + \frac{x^2}{2} + 2x - \frac{1}{x} + C.$$

Теперь вычислим определённый интеграл (при этом константу C можно опустить):

$$\int\limits_1^2 \frac{3x^4 + x^3 + 2x^2 + 1}{x^2}dx = \left(x^3 + \frac{x^2}{2} + 2x - \frac{1}{x}\right)\Bigg|_1^2 =$$

$$= \left(2^3 + \frac{2^2}{2} + 4 - \frac{1}{2}\right) - \left(1^3 + \frac{1^2}{2} + 2 - \frac{1}{1}\right) =$$

$$= 13{,}5 - 2{,}5 = 11.$$ ■

Пример 3. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y = \sqrt[3]{x}$, $y = 0$, $x = 8$.

Решение. Фигура, площадь которой требуется вычислить, изображена на рис. 93. Имеем:

$$S = \int\limits_0^8 \sqrt[3]{x}\,dx = \int\limits_0^8 x^{\frac{1}{3}}dx = \frac{x^{\frac{1}{3}+1}}{\frac{1}{3}+1}\Bigg|_0^8 = \frac{3}{4}\cdot x^{\frac{4}{3}}\Bigg|_0^8 =$$

$$= \frac{3}{4}\cdot\left(8^{\frac{4}{3}} - 0^{\frac{4}{3}}\right) = \frac{3}{4}\cdot(16 - 0) = 12.$$

Ответ: $S = 12$.

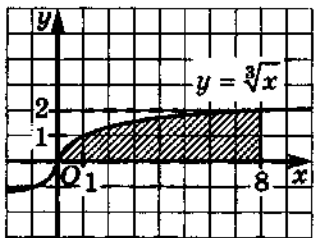


Рис. 93

Пример 4. Вычислить площадь фигуры, ограниченной прямыми $y = 0$, $x = 1$, $x = e$ и гиперболой $y = \frac{1}{x}$.

Решение. Речь идёт о вычислении площади криволинейной трапеции, изображённой на рис. 94. Имеем:

$$S = \int\limits_1^e \frac{dx}{x} = \ln x\,\Bigg|_1^e = \ln e - \ln 1 = 1 - 0 = 1.$$

Ответ: $S = 1$.

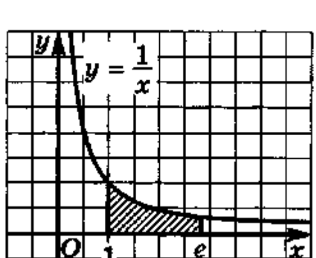


Рис. 94

Опираясь на формулу Ньютона — Лейбница, нетрудно обосновать некоторые свойства определённого интеграла.

<u>*Свойство 1.*</u> *Интеграл от суммы функций равен сумме интегралов:*

$$\int_a^b (f(x) + g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx.$$

Доказательство. Если $F(x)$ — первообразная для $f(x)$, а $G(x)$ — первообразная для $g(x)$, то $F(x) + G(x)$ — первообразная для $f(x) + g(x)$. Тогда

$$\int_a^b (f(x) + g(x))dx = (F(x) + G(x))\Big|_a^b =$$

$$= (F(b) + G(b)) - (F(a) + G(a)) = (F(b) - F(a)) + (G(b) - G(a)) =$$

$$= \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx.$$

<u>*Свойство 2.*</u> *Постоянный множитель можно вынести за знак интеграла:*

$$\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx.$$

<u>*Свойство 3.*</u> *Если $a < c < b$, то*

$$\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = \int_a^b f(x)dx$$

(аддитивное свойство интеграла).

Доказательство.

$$\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = ((F(c) - F(a)) + ((F(b) - F(c)) =$$

$$= F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)dx.$$

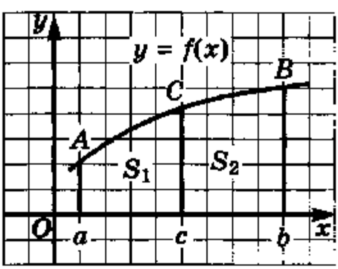


Рис. 95

Геометрический смысл аддитивного свойства интеграла заключается в том, что (рис. 95) площадь криволинейной трапеции равна сумме площадей криволинейных трапеций, из которых она составлена:

$$S_{aABb} = S_{aACc} + S_{cCBb}.$$

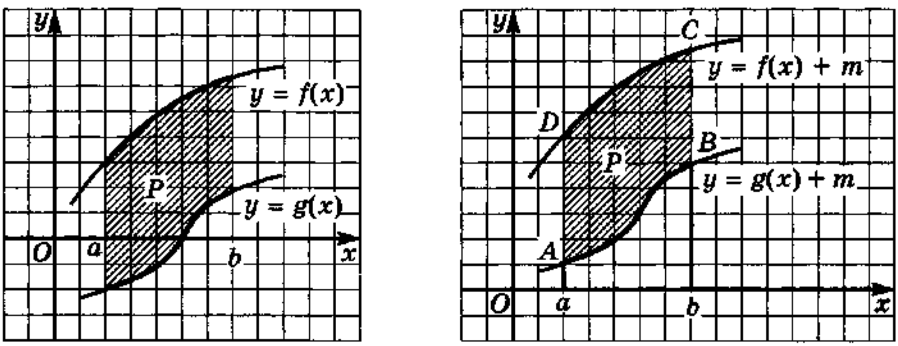
4. Вычисление площадей плоских фигур с помощью определённого интеграла

С помощью интеграла можно вычислять площади не только криволинейных трапеций того вида, который представлен на рис. 95, но и плоских фигур более сложного вида, например такого, который представлен на рис. 96. Фигура P (рис. 96, *а*) ограничена прямыми $x = a$, $x = b$ и графиками непрерывных функций $y = f(x)$, $y = g(x)$, причём на отрезке $[a; b]$ выполняется неравенство $g(x) \leqslant f(x)$. Для вычисления площади такой фигуры будем рассуждать следующим образом.

Выполним параллельный перенос фигуры P на m единиц вверх ($m > 0$) так, чтобы фигура P оказалась расположенной в координатной плоскости выше оси абсцисс (рис. 96, *б*). Теперь она ограничена сверху и снизу графиками функций $y = f(x) + m$, $y = g(x) + m$, причём обе функции непрерывны и неотрицательны на отрезке $[a; b]$. Имеем:

$$S_P = S_{ABCD} = S_{aDCb} - S_{aABb} = \int_a^b (f(x) + m)dx - \int_a^b (g(x) + m)dx =$$

$$= \int_a^b ((f(x) + m) - (g(x) + m))dx = \int_a^b (f(x) - g(x))dx.$$



а б

Рис. 96

Итак, *площадь S фигуры, ограниченной прямыми $x = a$, $x = b$ и графиками функций $y = f(x)$, $y = g(x)$, непрерывных на отрезке $[a; b]$ и таких, что для любого x из отрезка $[a; b]$ выполняется неравенство $g(x) \leqslant f(x)$, вычисляется по формуле*

$$\boxed{S = \int_a^b (f(x) - g(x))dx.} \qquad (3)$$

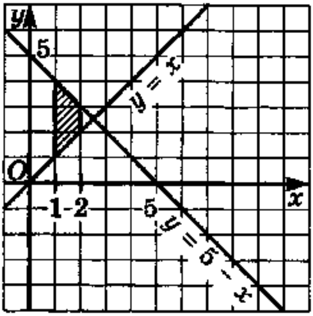


Рис. 97

Пример 4. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x$, $y = 5 - x$, $x = 1$, $x = 2$.

Решение. Фигура, площадь которой надо найти, изображена на рис. 97. Воспользовавшись формулой (3), получим:

$$S = \int_1^2 ((5 - x) - x)dx = \int_1^2 (5 - 2x)dx =$$

$$= (5x - x^2)\Big|_1^2 = (5 \cdot 2 - 2^2) - (5 \cdot 1 - 1^2) = 2.$$

Ответ: $S = 2$.

Пример 5. Вычислить площадь фигуры, ограниченной прямой $y = x - 2$ и параболой $y = x^2 - 4x + 2$.

Решение. Прямую $y = x - 2$ можно построить по точкам (2; 0) и (0; −2) (рис. 98). Абсциссу вершины параболы найдём из условия $y' = 0$. Имеем:

$$y' = (x^2 - 4x + 2)' = 2x - 4;$$
$$2x - 4 = 0;$$
$$x = 2.$$

Если $x = 2$, то

$$y = 2^2 - 4 \cdot 2 + 2 = -2.$$

Значит, вершиной параболы служит точка (2; −2), а осью параболы — прямая $x = 2$. Возьмём две пары точек, симметричных относительно оси параболы: (1; −1) и (3; −1), (0; 2) и (4; 2), — и построим параболу по пяти точкам (см. рис. 98). Парабола и прямая пересекаются в точках A и B, для отыскания абсцисс этих точек надо решить уравнение:

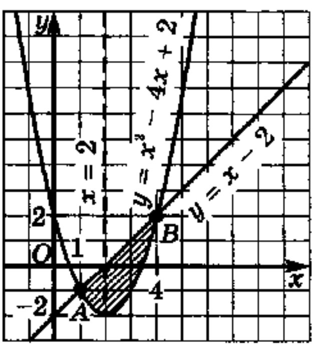


Рис. 98

$$x^2 - 4x + 2 = x - 2.$$

Находим последовательно:

$$x^2 - 5x + 4 = 0;$$
$$x_1 = 1,\ x_2 = 4.$$

Фигура, площадь которой надо найти, ограничена линиями $y = x^2 - 4x + 2$

(снизу) и $y = x - 2$ (сверху). Можно считать, что с боков эта фигура ограничена прямыми $x = 1$ и $x = 4$. Значит, для вычисления площади фигуры можно применить формулу (3):

$$S = \int_1^4((x-2)-(x^2-4x+2))dx = \int_1^4(5x - x^2 - 4)dx =$$

$$= \left(\frac{5x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - 4x\right)\Bigg|_1^4 = \left(5\cdot\frac{4^2}{2} - \frac{4^3}{3} - 4\cdot4\right) - \left(5\cdot\frac{1^2}{2} - \frac{1^3}{3} - 4\cdot1\right) = 4{,}5.$$

Ответ: $S = 4{,}5$.

Вопросы для самопроверки

1. Что называют определённым интегралом от функции $y = f(x)$ по отрезку $[a; b]$? Как обозначается определённый интеграл?

2. В чём состоит геометрический смысл определённого интеграла?

3. В чём состоит физический смысл определённого интеграла?

4. Запишите формулу Ньютона — Лейбница для вычисления определённого интеграла.

5. Примените формулу Ньютона — Лейбница для вычисления интеграла: а) $\int_1^e \frac{dx}{x}$; б) $\int_1^2 \frac{dx}{x^2}$; в) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\, dx$; г) $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \cos x\, dx$; д) $\int_1^3 3x^2\, dx$.

6. Что такое криволинейная трапеция?

7. Как вычислить площадь криволинейной трапеции, ограниченной линиями $y = 0$, $x = 3$, $x = 5$, $y = f(x)$, где $y = f(x)$ — непрерывная неотрицательная функция на отрезке $[3; 5]$?

8. Как вычислить площадь криволинейной трапеции, ограниченной линиями $y = 0$, $x = 3$, $x = 5$, $y = f(x)$, где $y = f(x)$ — непрерывная неположительная функция на отрезке $[3; 5]$?

9. Как вычислить площадь криволинейной трапеции, ограниченной линиями $x = 3$, $x = 5$, $y = f(x)$, $y = g(x)$, где $y = f(x)$, $y = g(x)$ — непрерывные функции на отрезке $[3; 5]$, причём на этом отрезке выполняется неравенство $f(x) \leqslant g(x)$?

Исторические сведения

Начиная с работ математиков конца XVII в. (Барроу, Валлис, Ньютон, Лейбниц, Гюйгенс, Бернулли, Лопиталь и др.) важнейшие естественно-научные задачи о нахождении площадей плоских фигур, площадей поверхностей, объёмов тел, центров тяжести и т. п. решают, используя производные и интегралы. Рассматривались эти задачи и задолго до момента создания дифференциального и интегрального исчисления.

Самыми древними являются задачи о нахождении длины окружности и площади круга, которые рассматривались ещё в школе пифагорейцев (V—III вв. до н. э.). Евдокс (IV в. до н. э.) разработал «метод исчерпываний», который был блестяще развит Архимедом (III в. до н. э.). В ряде разнообразных задач Архимед «исчерпывал» сложные объекты более простыми, бесконечно малыми «неделимыми» объектами, по существу используя интегральные суммы, аналогичные рассмотренным выше в § 21 суммам $f(x_0)\Delta x_0 + ... + f(x_{n-1})\Delta x_{n-1}$. Идеи Архимеда получили распространение в странах Востока и исламского мира и в XI—XIV вв. вернулись в Европу. Конец XVI — начало XVII в. было временем возрождения традиций Архимеда.

Немецкий астроном и математик Иоганн Кеплер (1571—1630) в «Новой астрономии» (1609) использовал метод неделимых для нахождения задачи о движении Марса. Итальянский математик Бонавенту́ра Кавалье́ри (1598—1647) в книге «Геометрия, развитая новым способом при помощи неделимых непрерывного» (1635) использовал разработанный им метод сечений для решения многочисленных геометрических задач. Великий итальянский естествоиспытатель Галиле́о Галиле́й (1564—1642) в книге «Беседы о двух новых науках» (1638) работал с неделимыми при доказательстве того, что при равномерно ускоренном движении, начинающемся с нулевой скорости, весь путь будет пройден за то же время, что и при равномерном движении со скоростью, равной половине финальной скорости равномерно ускоренного движения. Разнообразные и глубокие результаты принадлежат также Си́мону Сте́вину (1548—1620), Эванджели́сте Торриче́лли (1608—1647), Пьеру Ферма (1601—1665), Жилю Робервалю (1602—1675), Блэзу Паскалю (1623—1662), Джону Валлису (1616—1703).

Итогом бурного развития математики стало создание в конце XVII в. дифференциального и интегрального исчислений, связанных, соответственно, с понятиями производной и интеграла. Ньютон пришёл к понятию определённого интеграла в 1670—1671 гг. в работе «Метод флюксий...». В ней он так формулировал теорему, аналогичную теореме, приведённой выше на с. 172: «*Для получения должного значения площади, прилежащей к некоторой части абсциссы, эту площадь всегда следует брать равной разности значений z, соответствующей частям абсцисс, ограниченным началом и концом площади*». Тот же результат независимо получил Лейбниц в 1675 г. и опубликовал его в 1686 г. в статье

«О глубоко скрытой геометрии и анализе неделимых», в которой отчётливо выделена взаимная обратность дифференцирования (d) и интегрирования ($\int$) функций. Например, в ней имеется равенство $\frac{1}{2}xx = \int xdx$. Использование символа $\int$ предложил Лейбниц, «вытянув» по вертикали букву «S» от слова *summa* — суммирование, сумма. Термин «интеграл» ввёл Иоганн Бернулли, а появился он в работе Якоба Бернулли (1690). Символ $\int_a^b f(x)dx$ стал широко использоваться после работ французского математика и физика Жана Батиста Фурье (1768—1830).

На протяжении следующего века теория и практика интегрирования стала общезначимым и широко применимым способом исследования и применений функций одной и нескольких переменных. В XIX в. после работ французского математика Огюстена Луи Коши (1789—1857), немецкого математика Бернхарда Римана (1826—1866), французского математика Жана Дарбу (1842—1917) теория интегрирования числовых функций приняла практически свою нынешнюю форму. В XX в. этот тип интеграла стали называть *Римановским интегралом*, отличая его от различных обобщений, таких как *интеграл Стильтьеса, интеграл Лебега* и др. В развитии теории интегрирования заметную роль сыграли исследования отечественных математиков Михаила Васильевича Остроградского (1801—1862), Пафнутия Львовича Чебышева (1821—1894), Дмитрия Фёдоровича Егорова (1869—1931), Николая Николаевича Лузина (1883—1950) и др.

ГЛАВА 5

Элементы теории вероятностей и математической статистики

§ 22. Вероятность и геометрия

В 10-м классе вы познакомились с вероятностными задачами, в которых множество всех возможных исходов можно тем или иным способом подсчитать. Чаще всего вероятности случайных событий вычисляют по *классической вероятностной схеме.*

Классическая вероятностная схема

Для нахождения вероятности случайного события A при проведении некоторого опыта следует:

1) *найти число N всех возможных исходов данного опыта;*

2) *найти количество $N(A)$ тех исходов опыта, в которых наступает событие A;*

3) *найти частное $\frac{N(A)}{N}$; оно и будет равно вероятности события A.*

Напомним, что использовать эту схему можно только в тех случаях, когда все исходы некоторого опыта (испытания) *равновозможны* между собой. Условие равновозможности позволяет работать с простейшей вероятностной моделью того или иного испытания. Отметим, что подсчёт вероятностей без условия равновозможности приводит к более сложным математическим моделям.

Вероятность события A принято обозначать $P(A)$. Значит, $P(A) = \frac{N(A)}{N}$. Довольно часто пункты 1) — 3) приведённой классической вероятностной схемы выражают одной достаточно длинной фразой.

Классическое определение вероятности

Вероятностью события A при проведении некоторого испытания называют отношение числа тех исходов, в результате которых наступает событие A, к общему числу всех (равновозможных между собой) исходов этого испытания.

Однако весьма часто встречаются испытания и с *бесконечным* числом исходов. К ним классическая вероятностная схема неприменима, и приходится действовать по-другому. Начнём с примеров.

Пример 1. Случайным образом выбирают одно из решений неравенства $|x - 5| \leqslant 5$. Какова вероятность того, что оно окажется и решением неравенства $|x - 1| \leqslant 1$?

Решение. Сначала решим каждое из неравенств. Вспомним геометрический смысл модуля разности двух чисел a и b: $|a - b|$ — это расстояние между точками a и b на числовой прямой. Поэтому неравенство $|x - 1| \leqslant 1$ означает, что расстояние между точками x и 1 не больше 1. Значит, $[0; 2]$ — решение неравенства. Отметим этот отрезок длины 2 штриховкой (рис. 99).

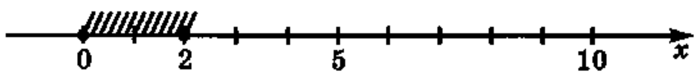


Рис. 99

В свою очередь, неравенство $|x - 5| \leqslant 5$ означает, что расстояние между точками x и 5 не больше 5. Значит, $[0; 10]$ — решение неравенства. Отметим этот отрезок длиной 10 другой штриховкой (рис. 100).

Рис. 100

Мы видим, что из всех решений неравенства $|x - 5| \leqslant 5$ только *одну пятую часть* составляют решения неравенства $|x - 1| \leqslant 1$. В таком случае искомую вероятность по определению принимают равной $\frac{1}{5}$, или 0,2. ■

Пример 2. Графический редактор, установленный на компьютере, случайно отмечает одну точку на мониторе — квадрате $ABCD$. Какова вероятность того, что эта точка будет ближе к центру монитора, чем к вершине C?

Решение. Пусть a — длина стороны монитора. Площадь S монитора равна a^2. Соединим отрезком вершину C с центром O монитора. К этому отрезку построим серединный перпендикуляр m. Его точки равноудалены от точек C и O. Точки, лежащие выше m, находятся ближе к C, чем к центру O. Пусть $K = m \cap BC$, $L = m \cap CD$ и $M = m \cap OC$. Тогда ΔKCL состоит из всех точек, которые удалены от C на такое же или меньшее расстояние, чем от центра монитора (рис. 101). Имеем: $MC = 0{,}5OC = 0{,}25AC =$

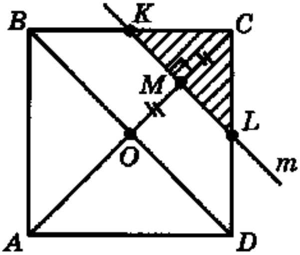


Рис. 101

$= 0{,}25a\sqrt{2}$; $S_{KCL} = 2S_{KMC} = 2 \cdot 0{,}5MC^2 = MC^2 = 0{,}25^2 \cdot 2a^2 = 0{,}125a^2$. Значит, вероятность выбора точки из ΔKCL равна $\frac{S_{KCL}}{S} = 0{,}125$.

По условию нам следует найти вероятность события, противоположного к попаданию точки в треугольник KCL. Получим $1 - 0{,}125 = 0{,}875$.

Ответ: 0,875.

Сформулируем общее правило для нахождения *геометрических вероятностей*.

> *Если площадь $S(A)$ фигуры A разделить на площадь $S(X)$ фигуры X, которая целиком содержит фигуру A, то получится вероятность того, что случайно выбранная точка фигуры X окажется в фигуре A:*
>
> $$P = \frac{S(A)}{S(X)}.$$

Обосновать это правило можно примерно следующим образом. Допустим, что фигура X состоит из N одинаковых квадратиков, которые могут иметь общие точки на границах, но не имеют общих точек внутри квадратиков. Допустим также, что некоторое количество $N(A)$ этих квадратиков образует фигуру A. Заменим задачу о произвольном выборе точки фигуры X на задачу о произвольном выборе одного из N одинаковых квадратиков, составляющих эту фигуру. Предполагается, что ни один из квадратиков не имеет никаких преимуществ перед другими, т. е. что все исходы такого выбора *равновозможны* между собой. Тогда применим классическую вероятностную схему и получим вероятность $P(A) = \frac{N(A)}{N}$ попадания точки в фигуру A. Если S_0 — площадь одного квадратика, то $N \cdot S_0 = S(X)$ и $N(A) \cdot S_0 = S(A)$. Значит,

$$\frac{S(A)}{S(X)} = \frac{N(A) \cdot S_0}{N \cdot S_0} = \frac{N(A)}{N} = P(A).$$

Для перехода к фигурам X и A произвольного вида требуется весьма тонкая математическая операция *предельного перехода*. Такие фигуры следует *приближать* фигурами, составленными из квадратиков, и уменьшать размеры квадратиков, устремляя эти размеры к нулю. Тогда количества N и $N(A)$ будут неограниченно возрастать, а их частное $\frac{N(A)}{N}$

всё более точно будет приближаться к отношению $\frac{S(A)}{S(X)}$ площадей фигур. В итоге такого предельного перехода как раз и получится, что $P(A) = \frac{S(A)}{S(X)}$.

Аналогично поступают и с множествами на прямой, и с пространственными телами. Только в этом случае площади следует заменить на длины линейных множеств или соответственно на объёмы пространственных тел.

Довольно часто по условию текстовой задачи на нахождение вероятности сначала строят ту или иную *геометрическую модель* и только потом вычисляют вероятность.

Пример 3. Отрезок единичной длины случайным образом разрезают на три отрезка. Какова вероятность того, что из них можно сложить треугольник?

Первый этап. *Построение модели.*

Пронумеруем отрезки слева направо и обозначим их длины соответственно x, y и z. Так как $x + y + z = 1$, то $z = 1 - x - y > 0$. Значит, $x > 0$, $y > 0$ и при этом $x + y < 1$. В координатной плоскости изобразим множество решений системы трёх неравенств:

$$\begin{cases} x > 0, \\ y > 0, \\ x + y < 1 \text{ (рис. 102).} \end{cases}$$

Получим треугольник Δ с вершинами (0; 0), (1; 0), (0; 1) без учёта его сторон. Каждому способу деления заданного отрезка на три части x, y, z поставим в соответствие точку $(x; y)$ из треугольника. Разным способам деления соответствуют разные точки треугольника, и при этом каждая точка $(x; y)$ треугольника Δ соответствует некоторому способу деления. Действительно, выбрав точку $(x; y) \in \Delta$, мы однозначно зададим и разбиение заданного отрезка единичной длины на три отрезка: первый отрезок — это $[0; x]$, второй отрезок — это $[x; x + y]$, ну а третий отрезок — это $[x + y; 1]$.

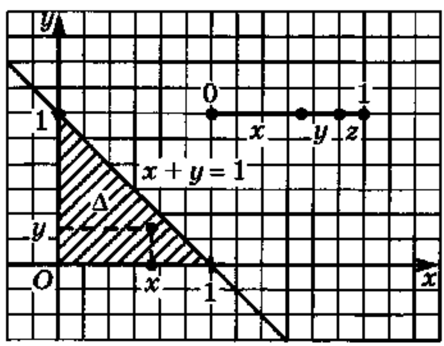


Рис. 102

Итак, вместо разбиения отрезка единичной длины на три отрезка мы будем рассматривать точку треугольника Δ.

После построения модели мы имеем дело с корректно поставленной математической задачей.

<u>Второй этап.</u> *Работа с моделью.*

Из трёх отрезков длиной x, y и z можно составить треугольник, только если выполняются три неравенства треугольника:

$$\begin{cases} x + y > z, \\ x + z > y, \\ y + z > x; \end{cases} \quad \begin{cases} x + y > 1 - x - y, \\ x + 1 - x - y > y, \\ y + 1 - x - y > x; \end{cases} \quad \begin{cases} x + y > 0{,}5, \\ y < 0{,}5, \\ x < 0{,}5. \end{cases}$$

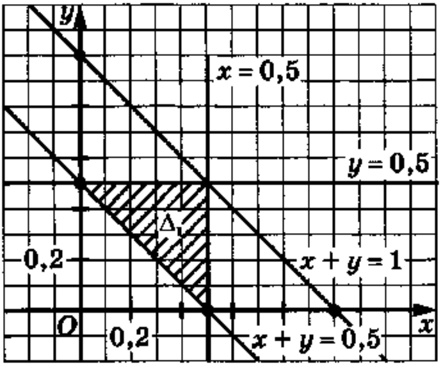


Рис. 103

Получается треугольник Δ_1 с вершинами (0,5; 0), (0; 0,5), (0,5; 0,5) (рис. 103). Он подобен треугольнику Δ с коэффициентом подобия 0,5. Значит, его площадь составляет четверть площади треугольника Δ. Поэтому при случайном выборе точки из треугольника Δ вероятность того, что она окажется в меньшем треугольнике Δ_1, равна $\frac{S_{\Delta_1}}{S_\Delta} = \frac{1}{4}$.

Ответ: 0,25.

Рассмотрим ещё один пример, связанный с предварительным построением геометрической модели исходной ситуации.

Пример 4. Случайным образом нарисовали треугольник. Какова вероятность того, что он является остроугольным?

<u>Первый этап.</u> *Построение модели.*

Так как размеры треугольника не важны, можно работать только с углами. Так как сумма углов треугольника равна 180°, то переформулируем задачу следующим образом: «Число 180 случайным образом представили в виде суммы трёх положительных слагаемых. Какова вероятность того, что все слагаемые меньше 90?»

Отличие от предыдущего примера состоит в том, что слагаемые не упорядочены. Неясно, какой из углов первый, какой второй, а какой третий. Разберёмся сначала с треугольниками, у которых нет двух равных углов.

Пусть $0 < x < y < z$ и $x + y + z = 180$, т. е. $z = 180 - x - y$. В координатной плоскости изобразим множество решений системы трёх неравенств:

$$\begin{cases} 0 < x, \\ x < y, \\ y < 180 - x - y; \end{cases} \qquad \begin{cases} 0 < x, \\ x < y, \\ x + 2y < 180. \end{cases}$$

Получим треугольник с вершинами $O(0;\ 0)$, $A(0;\ 90)$, $B(60;\ 60)$ без учёта его сторон (рис. 104). Каждая его точка $(x;\ y)$ однозначно «отвечает» за треугольник с углами x, y, $180 - x - y$ градусов. Итак, вместо разбиений числа 180 на три слагаемых мы будем рассматривать точки треугольника OAB. В этом и состоит построенная геометрическая модель. Заметим, что от добавления стороны, соединяющей вершины $(0;\ 0)$ и $(60;\ 60)$, площадь не изменится. Значит, можно считать, что случай $x = y$ также учтён в нашей модели. Аналогично обстоит дело и со случаем $y = z$, т. е. со стороной, соединяющей вершины $(0;\ 90)$ и $(60;\ 60)$.

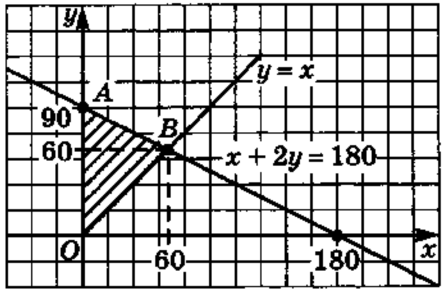


Рис. 104

После построения модели мы имеем дело с корректно поставленной математической задачей.

Второй этап. *Работа с моделью.*

Отметим в нашей модели точки, соответствующие остроугольным треугольникам. Для этого следует решить систему неравенств:

$$\begin{cases} x < y < 90, \\ y < 180 - x - y < 90; \end{cases} \qquad \begin{cases} x < y < 90, \\ x + 2y < 180, \\ x + y > 90. \end{cases}$$

Получается треугольник с вершинами $A(0;\ 90)$, $B(60;\ 60)$, $C(45;\ 45)$ (рис. 105). Так как OC — биссектриса равнобедренного треугольника AOD, то OC — и высота треугольника. Значит, $AC \perp OB$. Поэтому $\dfrac{S_{ABC}}{S_{AOB}} = \dfrac{0,5 \cdot AC \cdot BC}{0,5 \cdot AC \cdot OB} = \dfrac{BC}{OB}$.

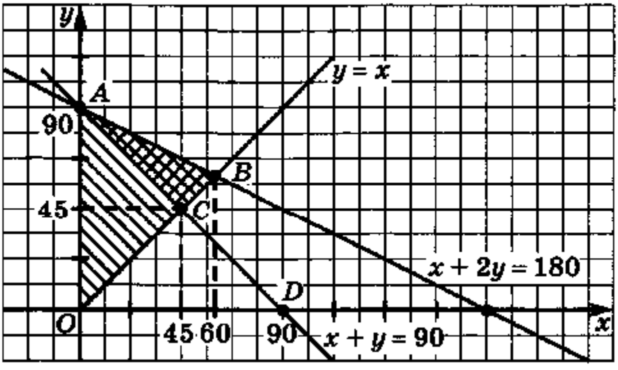


Рис. 105

Спроектируем точки B и C на ось абсцисс. По теореме Фалеса $\frac{BC}{OB} = \frac{60-45}{60} = \frac{15}{60} = 0{,}25$.

Ответ: 0,25.

Ответ получился довольно неожиданным: оказалось, что остроугольных треугольников «в три раза меньше», чем тупоугольных.

Завершим этот параграф широко известной в теории вероятностей задачей о встрече.

Пример 5. Два шпиона решили встретиться у фонтана. Каждый из них может гарантировать только то, что он появится у фонтана с 12-00 до 13-00. По инструкции шпион после прихода ждёт встречи у фонтана 15 минут и по их истечении (или ровно в 13-00) уходит. Какова вероятность встречи?

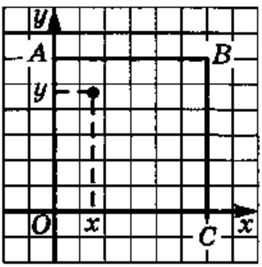


Рис. 106

Первый этап. *Построение модели.*

За единицу отсчёта возьмём 1 час, а за начало отсчёта возьмём 12-00. Произвольно пронумеруем шпионов. Пусть x — время прихода первого шпиона, а y — время прихода второго шпиона. Тогда $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant y \leqslant 1$ и точка $(x; y)$ квадрата с вершинами $O(0; 0)$, $A(0; 1)$, $B(1; 1)$, $C(1; 0)$ будет соответствовать времени прихода первого и второго шпионов. Итак, вместо всевозможных вариантов времени прихода шпионов мы будем рассматривать все точки квадрата $OABC$ (рис. 106).

После построения модели мы имеем дело с корректно поставленной математической задачей.

Второй этап. *Работа с моделью.*

Встреча произойдёт, только если время прихода первого шпиона отличается от времени прихода второго не более чем на 15 минут, т. е. (в выбранной системе координат) не более чем на 0,25. Другими словами, интересующее нас событие произойдёт, только если $|y - x| \leqslant 0{,}25$. Значит, следует решить систему неравенств:

$$\begin{cases} 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ 0 \leqslant y \leqslant 1, \\ |y - x| \leqslant 0{,}25; \end{cases} \qquad \begin{cases} 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ 0 \leqslant y \leqslant 1, \\ -0{,}25 \leqslant y - x \leqslant 0{,}25; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ 0 \leqslant y \leqslant 1, \\ x - 0{,}25 \leqslant y \leqslant x + 0{,}25. \end{cases}$$

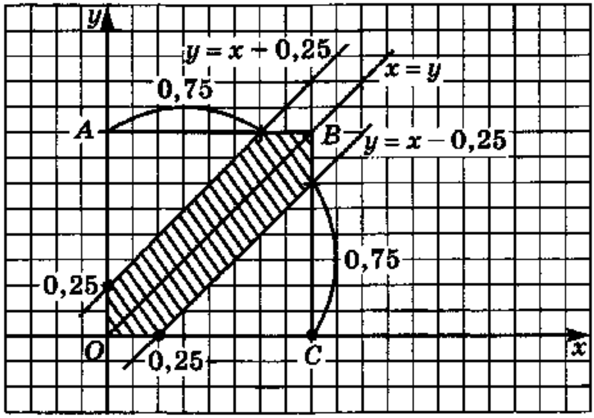


Рис. 107

Получится часть квадрата $OABC$, лежащая между прямыми $y = x - 0{,}25$ и $y = x + 0{,}25$ (заштрихованная фигура на рис. 107).

Незаштрихованная часть состоит из двух прямоугольных треугольников, катеты которых равны 0,75. Площадь этой части равна $0{,}75^2 = 0{,}5625$. Значит, заштрихованная часть составляет по площади 0,4375 от площади всего квадрата. Это и есть искомая вероятность.

Ответ: 0,4375, или 43,75 %.

Замечание. Одна и та же задача на нахождение вероятности может иметь различные математические модели, соответственно могут получиться различные ответы. Вернёмся к примеру 4: «Случайным образом нарисовали треугольник. Какова вероятность того, что он является остроугольным?» Выше случайный выбор треугольника был сведён к случайному выбору трёх положительных слагаемых (углов треугольника), в сумме дающих 180. Однако «случайно» нарисованный треугольник можно трактовать и как выбор длины трёх его сторон. Тогда можно рассуждать следующим образом.

Так как размеры треугольника не важны, будем считать, что его периметр равен 1. Пусть x, y, z — длины трёх сторон треугольника. Тогда $z = 1 - x - y$, и тот факт, что из отрезков длиной x, y, $1 - x - y$ можно составить треугольник, равносилен тому, что точка $(x; y)$ координатной плоскости принадлежит треугольнику Δ_1 с вершинами (0,5; 0), (0; 0,5), (0,5; 0,5), см. рис. 103 и решение примера 3.

Как же среди всех точек $(x; y)$ треугольника Δ_1 найти точки, которые соответствуют остроугольным треугольникам? По теореме косинусов угол, лежащий против стороны z, будет острым тогда и только тогда, когда $x^2 + y^2 > z^2$. Получаем, что $x^2 + y^2 > (1 - x - y)^2$, $x^2 + y^2 > 1 + x^2 + y^2 - 2x - 2y + 2xy$, $2x + 2y - 2xy > 1$, $y > \dfrac{0{,}5 - x}{1 - x}$.

Функция $y = \dfrac{0,5 - x}{1 - x}$ является дробно-линейной. При $0 < x < 0,5$ получится часть гиперболы, лежащая в треугольнике Δ_1 выше прямой $x + y = 0,5$ (рис. 108). Аналогичным образом

$$\begin{cases} x^2 + (1 - x - y)^2 > y^2, \\ y^2 + (1 - x - y)^2 > x^2; \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2 + (1 - x)^2 - 2(1 - x)y > 0, \\ y^2 + (1 - y)^2 - 2(1 - y)x > 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} y < \dfrac{x^2 + (1 - x)^2}{2(1 - x)}, \\ x < \dfrac{y^2 + (1 - y)^2}{2(1 - y)}. \end{cases}$$

Система уравнений

$$\begin{cases} y = \dfrac{x^2 + (1 - x)^2}{2(1 - x)}, \\ x = \dfrac{y^2 + (1 - y)^2}{2(1 - y)} \end{cases}$$

определит в треугольнике Δ_1 ещё две кривые — части двух других гипербол. Площадь части треугольника Δ_1, лежащей вне всех трёх гипербол, может быть найдена с помощью определённых интегралов (мы опускаем подробные вычисления). Оказывается, что она занимает приблизительно 0,31 площади всего треугольника Δ_1. Тем самым получится, что искомая вероятность составляет более 30 %, а не 25 %, как это было выше в решении примера 4.

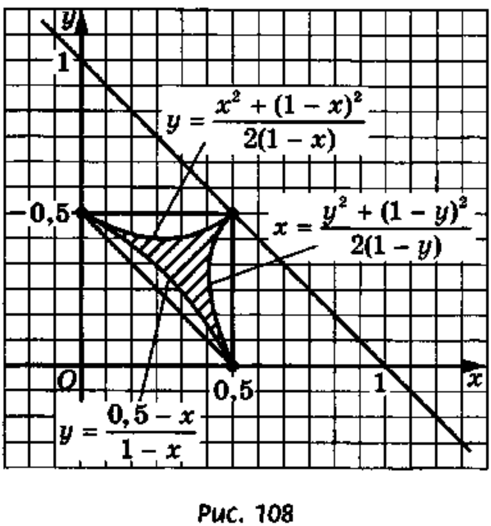


Рис. 108

Итак, «случайный» выбор треугольника может иметь различные математические модели, что приводит к принципиально разным математическим задачам. Ответы, как мы видим, получаются тоже разными.

Вопросы для самопроверки

1. Из скольких основных шагов состоит классическая вероятностная схема?

2. Сформулируйте классическое определение вероятности.

3. Сформулируйте правило нахождения геометрических вероятностей для случая плоских фигур.

4. Сформулируйте правило нахождения геометрических вероятностей для случая линейных множеств и для случая пространственных тел.

5. На отрезке [11; 21] наугад выбирают точку. Какова вероятность того, что она окажется ближе к числу 19, чем к числу 17?

6. В прямоугольном треугольнике случайно выбирают точку. Какова вероятность того, что она окажется ближе к гипотенузе, чем к вершине прямого угла?

7. В правильном треугольнике случайно выбирают точку. Какова вероятность того, что она окажется ближе к центру вписанной окружности, чем к границе треугольника?

8. В шаре случайно выбирают точку. Какова вероятность того, что она окажется ближе к границе шара, чем к его центру?

§ 23. Независимые повторения испытаний с двумя исходами

Отличительная особенность многих вероятностных задач состоит в том, что испытание, в результате которого ожидается наступление интересующего нас события, можно многократно повторять. В каждом из таких повторений нас интересует вопрос, произойдёт или не произойдёт это событие. А во всей серии повторений важно знать, *сколько именно раз* может произойти или не произойти это событие. Например, игральный кубик бросили десять раз подряд. Какова вероятность того, что «четвёрка» выпадет ровно три раза? Или же какова вероятность того, что при пяти бросаниях монеты орёл выпадет ровно четыре раза? Швейцарский математик начала XVIII века Якоб Бернулли объединил примеры и вопросы такого типа в единую вероятностную схему, её принято называть *схемой Бернулли*.

Рассмотрим испытание, в котором вероятность наступления случайного события A равна $P(A)$. Из курса 10-го класса вам известна формула $P(A) + P(\bar{A}) = 1$, где $\bar{A}$ — событие, противоположное событию A. Значит, $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$. Будем рассматривать исходное испытание как испытание только с двумя возможными исходами: один состоит в том, что событие A произойдёт, а другой состоит в том, что событие A не произойдёт, т. е. произойдёт событие $\bar{A}$. Для краткости назовём первый исход (наступление события A) «успехом», а второй исход (наступление события $\bar{A}$) — «неудачей». Вероятность «успеха» обозначим $P(A) = p$, а вероятность «неудачи» обозначим q; $q = P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 1 - p$.

Схема Бернулли

Рассматривают n независимых повторений одного и того же испытания с двумя возможными исходами: «успехом» и «неудачей». Вероятность «успеха» равна p, а вероятность «неудачи» равна q, $p + q = 1$. Требуется найти вероятность $P_n(k)$ того, что в этих n повторениях произойдёт ровно k «успехов».

Про n независимых повторений одного и того же испытания с двумя возможными исходами более кратко говорят, как об n *испытаниях Бернулли.* Точный ответ на поставленный вопрос даёт следующая теорема.

Теорема 1 (теорема Бернулли). ***Вероятность $P_n(k)$ наступления ровно k «успехов» в n независимых повторениях одного и того же испытания вычисляется по формуле***

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k},$$

где p — вероятность «успеха», а $q = 1 - p$ — вероятность «неудачи» в отдельном испытании.

Прежде чем говорить о доказательстве теоремы Бернулли, приведём два примера её использования.

Пример 1. Каждый из четырёх приятелей выучил ровно 5 вопросов из 20 заданных к зачёту. На зачёте они отвечали в разных аудиториях и получали вопросы независимо друг от друга. Найти вероятность того, что:

а) каждому достался тот вопрос, который он выучил;

б) никому не достался вопрос, который он выучил;

в) только одному из приятелей достался тот вопрос, который он не выучил;

г) хотя бы одному из приятелей достался тот вопрос, который он выучил.

Решение. Если кому-то достался известный ему вопрос, то это «успех». Вероятность «успеха» у каждого из приятелей, готовившихся к зачёту, одна и та же: она равна $\frac{5}{20} = 0{,}25$. Поэтому можно считать, что мы имеем дело с $n = 4$ испытаниями Бернулли с вероятностью «успеха» в отдельном испытании $p = 0{,}25$.

а) В этом случае $k = n = 4$, поэтому

$$P_4(4) = C_4^4\, p^4 q^{4-4} = 0{,}25^4 \approx 0{,}004.$$

б) В этом случае $k = 0$, поэтому

$$P_4(0) = C_4^0\, p^0 q^{4-0} = 0{,}75^4 \approx 0{,}316.$$

в) Здесь $k = 3$, поэтому

$$P_4(3) = C_4^3 p^3 q^{4-3} = 4 \cdot 0{,}25^3 \cdot 0{,}75 \approx 0{,}047.$$

г) Событие, противоположное заданному, состоит в том, что никому из приятелей не достался известный ему вопрос, т. е. что произошло $k = 0$ «успехов». Вероятность такой общей неудачи уже посчитана в пункте б). Значит, нужная нам вероятность равна $1 - P_4(0) = 1 - 0{,}75^2 \approx 0{,}684$. ■

Пример 2. Проведены n испытаний Бернулли с вероятностью p «успеха» в отдельном испытании, $n > 1$. Найти вероятность того, что:

а) все испытания закончатся «успехом»;

б) все испытания закончатся «неудачей»;

в) «неудача» наступит ровно в двух случаях;

г) произойдёт или ровно два «успеха», или ровно две «неудачи».

Решение.

а) В данном случае число k «успехов» равно числу n всех испытаний. По теореме Бернулли получаем $P_n(n) = C_n^n p^n q^{n-n} = 1 \cdot p^n \cdot q^0 = p^n$.

б) В данном случае число k «успехов» равно 0. Значит,

$$P_n(0) = C_n^0 p^0 q^{n-0} = 1 \cdot 1 \cdot q^n = q^n = (1 - p)^n.$$

в) В данном случае число «неудач» равно 2, а число k «успехов» равно $n - 2$. Значит,

$$P_n(n - 2) = C_n^{n-2} p^{n-2} q^{n-(n-2)} = \frac{n!}{(n-2)!2!} p^{n-2} q^2 = \frac{n(n-1)}{2} p^{n-2} q^2.$$

г) Если A — событие, состоящее в наступлении ровно двух «успехов», а B — событие, состоящее в наступлении ровно двух «неудач», то

$$P(A) = \frac{n(n-1)}{2} p^2 q^{n-2}; \; P(B) = \frac{n(n-1)}{2} p^{n-2} q^2.$$

Требуется найти вероятность $P(A + B)$ суммы $A + B$ событий A и B. Если число n испытаний больше четырёх, то события A и B не могут наступить одновременно. Напомним, что такие события называют *несовместными*. В таком случае

$$P(A + B) = P(A) + P(B) = \frac{n(n-1)}{2} (p^2 q^{n-2} + p^{n-2} q^2) = \frac{n(n-1)}{2} p^2 q^2 (q^{n-4} + p^{n-4}).$$

Если $n = 4$, то $A = B$: ведь если в четырёх повторениях имеется ровно два «успеха», то имеется и ровно две «неудачи». Значит, $A + B = A$ и $P(A + B) = P(A) = 6p^2q^2$.

При $n = 3$ и $n = 2$ опять получаются несовместные события A и B. Поэтому искомые вероятности равны соответственно $3p^2q + 3pq^2 = 3pq(p + q) = 3pq$ и $p^2 + q^2 = (p + q)^2 - 2pq = 1 - 2pq$. ■

Мы ограничимся доказательством теоремы Бернулли на конкретном примере (пример 3). В этом конкретном случае доказательство теоремы Бернулли может быть сведено к использованию правила умножения.

Пример 3. Найти вероятность того, что при десяти бросаниях игрального кубика «четвёрка» выпадет ровно три раза.

Решение. Повторим, что в отличие от предыдущих примеров мы будем *доказывать* формулу из теоремы Бернулли, а *не пользоваться* этой формулой для конкретных вычислений. В данном примере $n = 10$, $k = 3$, а «успех» состоит в выпадении «четвёрки» при одном бросании, поэтому $p = \frac{1}{6}$, $q = \frac{5}{6}$.

Обозначим A_{123} событие, состоящее в том, что «четвёрка» выпадет только при первом, втором и третьем бросаниях. Найдём вероятность этого события: $P(A_{123}) = \frac{N(A_{123})}{N}$. По правилу умножения при 10 независимых бросаниях кубика имеется $N = 6^{10}$ равновозможных исходов. Найдём $N(A_{123})$, т. е. количество тех исходов, в которых наступает событие A_{123}. Для первых трёх бросаний имеется по одному возможному исходу, а для всех остальных бросаний имеется ровно по пять исходов: может выпасть 1, 2, 3, 5 или 6. По правилу умножения получаем, что $N(A_{123}) = 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 5 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot 5 = 5^7$. Значит,

$$P(A_{123}) = \frac{N(A_{123})}{N} = \frac{5^7}{6^{10}} = \frac{1^3 \cdot 5^7}{6^3 \cdot 6^7} = \left(\frac{1}{6}\right)^3 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^7 = p^3q^7.$$

Обозначим A_{279} событие, состоящее в том, что «четвёрка» выпала только при втором, седьмом и девятом бросаниях кубика. Вероятность $P(A_{279})$ находится точно так же, как и вероятность $P(A_{123})$. Такой же ответ получается и для событий A_{134}, A_{458}, A_{567}, ..., и для любого события A_{xyz}, состоящего в том, что «четвёрка» выпала именно при бросаниях с номерами x, y, z. Все события A_{xyz} между собой попарно несовместны. Вероятность $P(A_{xyz})$ каждого из событий A_{xyz} равна p^3q^7. Количество этих событий равно количеству выборов трёх номеров из 10 данных без учёта порядка, т. е. равно C_{10}^3. По теореме суммы для нахождения вероятности несовместных событий получаем:

$$P(A) = \underbrace{p^3q^7 + p^3q^7 + \ldots + p^3q^7}_{C_{10}^3 \text{ раз}} = C_{10}^3 p^3 q^7. \qquad \blacksquare$$

Формулу из теоремы Бернулли можно объяснить и с помощью дерева вариантов. Рассмотрим двоичное дерево, имеющее n уровней, из каждого его узла выходят две ветви: левая и правая (рис. 109). Поместим в верхний узел (нулевой уровень) единичную массу и далее будем её распределять между остальными узлами следующим образом. Разделим единичную массу в отношении $p : q$.

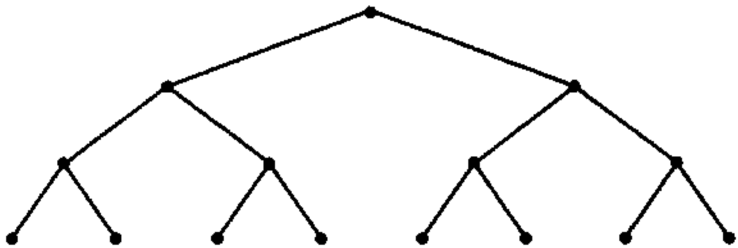


Рис. 109

В левый узел первого уровня поместим массу p, а в правый узел первого уровня поместим массу q. Каждую из уже распределённых масс снова разделим в отношении $p : q$ и на следующий уровень влево «отправим» p-ю часть, а вправо «отправим» q-ю часть имеющейся в узле массы. Например, на втором уровне единичная масса будет распределена так, как показано на рис. 110,

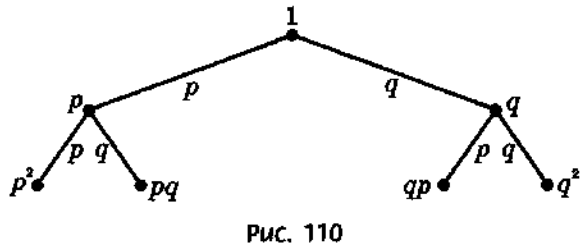


Рис. 110

а на третьем уровне единичная масса будет распределена так, как показано на рис. 111.

На n-м уровне у дерева будет 2^n узлов, по которым будет распределена единичная масса (рис. 112). Масса в каждом узле равна произведению n множителей, каждый из которых равен p или q. Если в узел мы пришли, сделав k поворотов налево, то остальные $n - k$ поворотов были направо; значит, в таком узле будет размещена масса $p^k q^{n-k}$. Выбрать k поворотов влево из n

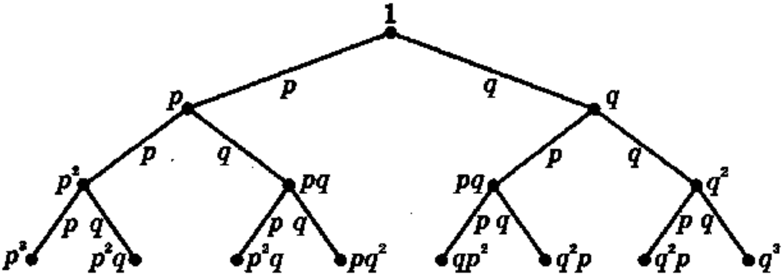


Рис. 111

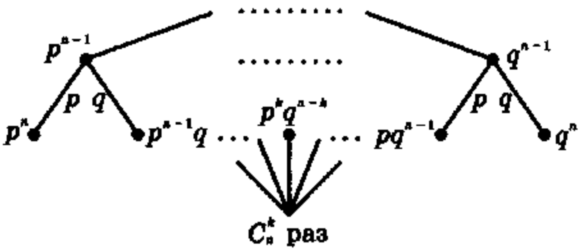


Рис. 112

данных можно ровно C_n^k способами. Поэтому масса p^kq^{n-k} встретится ровно в C_n^k узлах из всех 2^n узлов последнего, n-го уровня. Значит, общая масса, соответствующая всем возможностям сделать ровно k поворотов влево, равна $C_n^2 p^kq^{n-k}$. Это и есть вероятность $P_n(k)$ появления ровно k «успехов» в n испытаниях Бернулли.

Распределение всей единичной вероятности на n-м уровне удобно описать после приведения подобных членов. Для этого составим следующую таблицу из двух строк и $(n + 1)$ столбцов. В клетки первой строки поочерёдно впишем числа $k = 0, 1, 2, \ldots, n - 1, n$, а в соответствующие клетки второй строки впишем числа $C_n^k p^kq^{n-k}$. Получим таблицу распределения вероятностей числа «успехов» в n испытаниях Бернулли.

0	1	2	…	k	…	$n-1$	n
q^n	npq^{n-1}	$C_n^2p^2q^{n-2}$	…	$C_n^kp^kq^{n-k}$	…	$np^{n-1}q$	p^n

Если сложить все числа $C_n^kp^kq^{n-k}$ для $k = 0, 1, 2, \ldots, n - 1, n$, то в результате получится 1:

$$1 = C_n^0q^n + C_n^1pq^{n-1} + C_n^2p^2q^{n-2} + \ldots + C_n^kp^kq^{n-k} + \ldots + C_n^{n-1}p^{n-1}q + C_n^np^n.$$

Но это равенство есть частный случай формулы бинома Ньютона:

$$(q+p)^n = C_n^0 q^n + C_n^1 p q^{n-1} + \ldots + C_n^k p^k q^{n-k} + \ldots + C_n^{n-1} p^{n-1} q + C_n^n p^n.$$

По этой причине распределение числа «успехов» в испытаниях Бернулли по вероятности их наступления, как правило, называют *биномиальным распределением*.

Пример 4. Вероятность того, что стрело́к поразит мишень при одном выстреле, равна 0,4. Стрелок независимо производит пять выстрелов.

а) Найти вероятность того, что стрелок ни разу не промахнётся.

б) Найти вероятность того, что стрелок поразит мишень не менее двух раз.

в) Найти наиболее вероятное число попаданий в мишень.

г) Составить таблицу распределения вероятностей числа попаданий.

Решение. Выполним сначала задание пункта г), а затем на основе составленной таблицы задания пунктов а) — в). По условию

$n = 5,\ p = 0{,}4,\ q = 0{,}6,\ k = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$:

$$P_5(0) = C_5^0 p^0 q^5 = 0{,}6^5 \approx 0{,}078;$$

$$P_5(1) = C_5^1 p q^4 = 5 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}6^4 \approx 0{,}259;$$

$$P_5(2) = C_5^2 p^2 q^3 = 10 \cdot 0{,}4^2 \cdot 0{,}6^3 \approx 0{,}346;$$

$$P_5(3) = C_5^3 p^3 q^2 = 10 \cdot 0{,}4^3 \cdot 0{,}6^2 \approx 0{,}23;$$

$$P_5(4) = C_5^4 p^4 q = 5 \cdot 0{,}4^4 \cdot 0{,}6 \approx 0{,}077;$$

$$P_5(5) = C_5^5 p^5 q^0 = 0{,}4^5 = 0{,}2^{10} \approx 0{,}01.$$

Итак,

0	1	2	3	4	5
0,078	0,259	0,346	0,23	0,077	0,01

Теперь рассмотрим пункты а) — в).

а) «Ни разу не промахнётся» — это значит, что стрелок поразит мишень все пять раз, т. е. $k = 5$. Вероятность равна примерно 0,01 (см. таблицу).

б) «Поразит мишень не менее двух раз» — это значит, что стрелок попадёт 2, 3, 4 или 5 раз. Остаётся сложить нужные числа из второй строки таблицы:

$$0{,}346 + 0{,}23 + 0{,}077 + 0{,}01 = 0{,}663.$$

Заметим, что проще было бы из 1 вычесть сумму $0{,}078 + 0{,}259$.

в) Наибольшая вероятность получается при $k = 2$. Значит, 2 — наиболее вероятное число попаданий в мишень при пяти выстрелах этого стрелка. ■

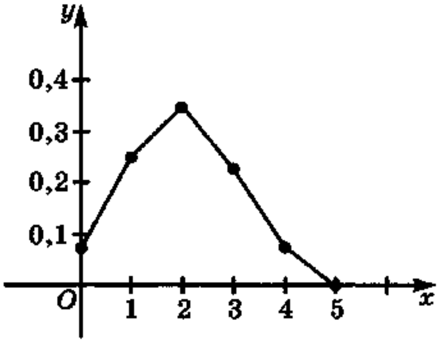


Рис. 113

Сведения, собранные в таблице примера 4, можно изобразить на графике (рис. 113).

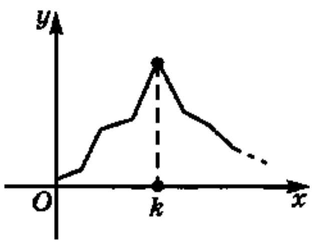
Ломаную, соединяющую отмеченные на рис. 113 точки, называют *многоугольником распределения.* Формально полагалось бы точно сказать, что именно распределяется. Получится довольно длинный словесный оборот: «многоугольник распределения вероятностей числа попаданий в мишень стрелка при пяти выстрелах». Чаще всего его сокращают до термина «многоугольник распределения»: как правило, в конкретной ситуации ясно, о распределении чего именно идёт речь.

Общий ответ про наиболее вероятное (наивероятнейшее) число «успехов» при n испытаниях Бернулли, конечно же, зависит от соотношения чисел n и p. Оказывается, что последовательность чисел $P_n(0)$, $P_n(1)$, $P_n(2)$, ..., $P_n(k)$, ..., $P_n(n-1)$, $P_n(n)$ ведёт себя так: сначала она возрастает, а затем, приняв наибольшее значение, убывает. Только в некоторых специальных случаях наибольшее значение достигается не для одного, а для двух соседних значений k (рис. 114).

Сравним вероятности $P_n(k+1)$ и $P_n(k)$.

$$P_n(k+1) - P_n(k) = \frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!}p^{k+1}q^{n-k-1} - \frac{n!}{k!(n-k)!}p^k q^{n-k} =$$

$$= \frac{n!}{(k+1)!(n-k)!}p^k q^{n-k-1}(p(n-k) - q(k+1)).$$



или

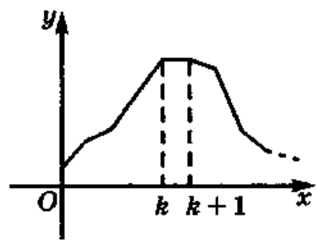


Рис. 114

Знак всей разности совпадает со знаком последнего множителя, упростим его:

$$p(n-k) - q(k+1) = np - k(p+q) - q = (np - q) - k.$$

Поэтому $P_n(k) < P_n(k+1)$ при $0 \leqslant k < np - q$ и, наоборот, $P_n(k) > P_n(k+1)$ при $np - q < k \leqslant n$. Значит, наибольшее значение вероятность $P_n(k)$ принимает при значении k, равном ближайшему к $np - q$ справа целому числу. Если же само число $np - q$ целое, то наибольшее значение вероятность $P_n(k)$ принимает для двух значений k: для $k = np - q$ и для $k = np - q + 1 = np + p$ (рис. 115).

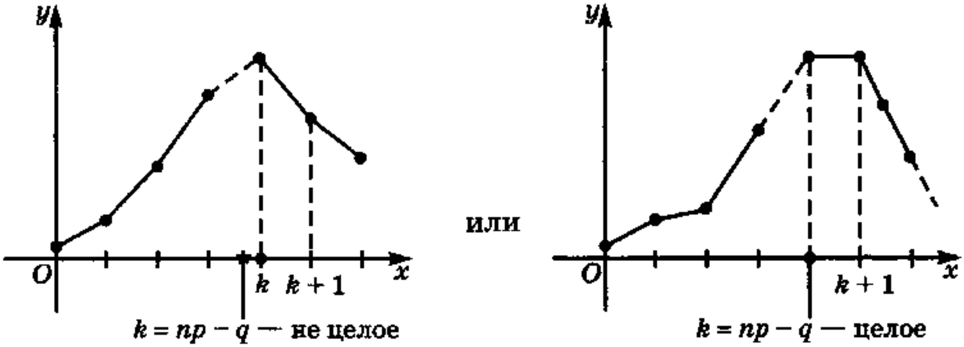


Рис. 115

Пример 5. Найти наивероятнейшее число выпадений решки при: а) 100 бросаниях монеты; б) 1001 бросании монеты.

Решение.

а) В данном случае $n = 100$, $p = q = 0{,}5$. Тогда число $np - q = 100 \cdot 0{,}5 - 0{,}5 = 49{,}5$ — не целое. Ближайшее к нему справа целое число равно 50. Оно равно половине числа всех бросаний и является наивероятнейшим числом выпадений решки.

б) В данном случае $n = 1001$, $p = q = 0{,}5$. Тогда число $np - q = 1001 \cdot 0{,}5 - 0{,}5 = 500$ — целое. Значит, вероятность $P_n(k)$ числа «успехов» принимает своё наибольшее значение при $k = 500$ и при $k = 501$. ■

Так как $np \in [np - q;\ np + p]$ и наивероятнейшее число «успехов» $k \in [np - q;\ np + p]$, то можно считать, что $k \approx np$.

Теорема 2. ***Наиболее вероятное число «успехов» в n испытаниях Бернулли приближённо равно np, где p — вероятность «успеха» в отдельном испытании.***

Например, если вероятность «успеха» в одном испытании равна 0,1, а вы провели 143 повторения этого испытания, то наивероятнейшее число «успехов» равно $143 \cdot 0{,}1 \approx 14$. При таком грубом подсчёте ошибка возможна, но ошибка эта невелика: можно ошибиться максимум на 1. Сформулируем следующее правило.

Для того чтобы найти наивероятнейшее число $k_{наивер}$ «успехов» в n испытаниях Бернулли с вероятностью «успеха», равной p, следует:

1) *вычислить число np;*

2) *от числа np на координатной прямой отложить q влево и p вправо;*

3) *целое число, лежащее на отрезке $[np - q;\ np + p]$ единичной длины, и будет равно $k_{наивер}$; если таких целых чисел два, то $k_{наивер}$ может равняться любому из них.*

Вопросы для самопроверки

1. Какова вероятность того, что при трёх бросаниях игрального кубика сумма выпавших очков равна 18?

2. Какова вероятность того, что при пяти бросаниях монеты все пять раз выпадет решка?

3. Сформулируйте постановку вопроса в схеме Бернулли.

4. Сформулируйте теорему Бернулли. С помощью дерева вариантов проведите доказательство в случае $n = 3$, $k = 1$.

5. Заполните пустые места в частном случае формулы Бернулли: $P_{??}(3) = C_{10}^{3} 0{,}6^{?}(???)^{7}$.

6. Вероятность «успеха» в испытании равна p. Чему равна вероятность того, что в четырёх независимых повторениях испытания «успехов» будет столько же, сколько и «неудач»?

7. Сформулируйте правило нахождения наивероятнейшего числа успехов в n испытаниях Бернулли. Чему приблизительно равно это число?

§ 24. Статистические методы обработки информации

Данные заметного числа конкретных измерений имеют одно довольно неприятное свойство. Оно состоит в том, что информация получается очень большого объёма. Так бывает, когда количество самих данных весьма велико. Например, данные о размерах вкладов населения в Сбербанке, сведения о дате рождения сотрудников завода, балловые результаты Единого государственного экзамена в конкретном городе, масса тела и рост солдат, начавших прохождение военной службы, список цен всех покупок, совершённых в большом универсаме в течение дня, и т. д. Одна из основных задач статистики состоит в надлежащей *обработке информации*. Конечно, у статистики есть много других задач: сбор и хранение информации, разработка различных прогнозов, оценка их достоверности и т. д. Но ни одна из этих целей не достижима без обработки данных.

В простейшем виде порядок преобразований первоначально полученной информации примерно таков:

1) данные измерений *упорядочивают* и *группируют*;

2) после группировки составляют *таблицы распределения данных*;

3) таблицы распределения позволяют построить *графики распределения данных*;

4) составляют своего рода *паспорт данных* измерения, в котором собрано небольшое количество основных *числовых характеристик* полученной информации.

На практике реализация этих шагов проводится с помощью той или иной компьютерной программы обработки и анализа данных. Имеется широкий спектр различных специализированных статистических программ: «Statistica», «MiniTab», «Tecplot» и т. д. Статистические программы встроены и в более математизированные пакеты «Maple», «Mathematica», «MatLab» и другие. Среди стандартных программ «Microsoft Office» имеется и программа «Microsoft Excel». Если вы уверенно работаете в этом редакторе, то после введения данных измерения вы можете выбрать разные режимы их наглядного представления и получить некоторые числовые характеристики ряда данных.

Однако этот параграф — не руководство по использованию того или иного пакета компьютерных программ. Наша цель — познакомить вас с тем, что, собственно, происходит с информацией при её статистической обработке.

Для наглядности мы выберем одно конкретное измерение и покажем, как реализуются шаги 1) — 4) в этом конкретном случае. В других измерениях может измениться объём информации, сложность обработки, появятся всякие технические детали, но принцип обработки информации останется тем же самым.

Измерение. У 50 выпускников школы независимо попросили назвать любую цифру. Получили следующие данные:

2	1	3	3	5	5	3	8	1	7
1	5	7	5	3	8	0	4	7	3
3	9	6	9	1	6	9	1	2	3
9	8	7	0	5	1	3	1	3	9
6	2	3	5	9	2	5	1	5	7

Шаг 1) весьма прост. *Упорядочивание* состоит в том, что все данные выписывают последовательно в некотором порядке. В большинстве случаев речь идёт о порядке *возрастания* числовых данных, т. е. следует начать с наименьшего встретившегося результата, а закончить наибольшим результатом. При таком выписывании автоматически произойдёт и простейшая *группировка* информации. А именно, мы увидим, сколько раз в этом измерении встретилась каждая конкретная цифра. Тем самым все результаты измерения разобьются на группы одинаковых результатов. Вот что получится в данном случае:

$$\underbrace{0,\,0,}_{2}\ \underbrace{1,\,\ldots,\,1,}_{8}\ \underbrace{2,\,\ldots,\,2,}_{4}\ \underbrace{3,\,\ldots,\,3,}_{10}\ \underbrace{4,}_{1}\ \underbrace{5,\,\ldots,\,5,}_{8}$$

$$\underbrace{6,\,6,\,6,}_{3}\ \underbrace{7,\,\ldots,\,7,}_{5}\ \underbrace{8,\,8,\,8,}_{3}\ \underbrace{9,\,\ldots,\,9.}_{6}$$

Полученный ряд чисел называют *сгруппированным рядом данных* измерения.

Заметим, что ответ на задание «Назовите любую цифру» нередко пытаются представить как некоторую психологическую характеристику отвечающего. Довольно популярно мнение, что «3» называют посредственности, «5» — возможные карьеристы, «1» и «9» — выскочки и т. п. Конечно же, описание типа личности по ответу на один-единственный вопрос является или шуткой, или обманом. Составить сколько-нибудь точный психологический портрет опрашиваемого можно только на основе нескольких независимых тестов, состоящих из довольно длинных серий разнообразных вопросов (не менее 10—20 вопросов в каждой серии).

Но вернёмся к уже полученному сгруппированному ряду данных измерения. Теперь всё готово для проведения шага 2), т. е. для получения таблицы данных. Она состоит из двух строчек. В клетки первой строки выписывают поочерёдно все различные значения, реально полученные в измерении. Каждое полученное значение данных конкретного измерения называют *вариантой* этого измерения. В нашем случае имеется десять вариант: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Во второй строке таблицы под каждой вариантой из первой строки записывают *кратность варианты* — число, показывающее, сколько раз эта варианта встретилась в данном измерении. Вот что получается.

Варианты	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Всего: 10
Кратности	2	8	4	10	1	8	3	5	3	6	Сумма: 50

По существу, составленная таблица — это тот же сгруппированный ряд данных, который получен в шаге 1). Просто изменилась форма записи: вместо строки данных мы получили таблицу. Эту таблицу называют *таблицей распределения кратностей данных измерения* или просто *таблицей распределения*. Последний столбец приписывают для контроля. В его верхней клетке указывают количество всех вариант, а в нижней клетке указывают сумму всех кратностей всех вариант. Другими словами, в этой клетке указывают общее количество данных измерения — *объём измерения*.

Если кратность данной варианты разделить на объём измерения, то получится *частота варианты*.

$$\textbf{Частота варианты} = \frac{\textit{кратность варианты}}{\textit{объём измерения}}$$

Это число показывает, какую часть (долю) среди всех данных составляют данные, равные выбранной варианте. Разумеется, частоту варианты можно измерять и в процентах.

$$\textbf{Процентная частота варианты} = \frac{\textit{кратность варианты}}{\textit{объём измерения}} \cdot 100\%$$

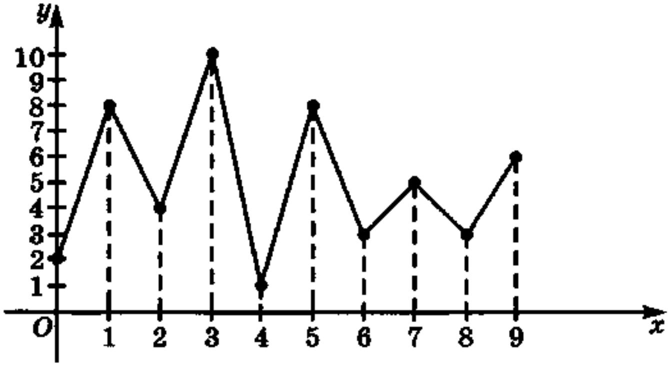
Зная таблицу распределения кратностей, нетрудно составить таблицу распределения частот данных. Вот как это выглядит в нашем измерении.

Варианты	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Всего: 10
Кратности	2	8	4	10	1	8	3	5	3	6	Сумма: 50
Частоты	0,04	0,16	0,08	0,2	0,02	0,16	0,06	0,1	0,06	0,12	Сумма: 1
Частоты (%)	4	16	8	20	2	16	6	10	6	12	Сумма: 100

Довольно часто вся таблица из четырёх строк не нужна и ограничиваются таблицей, состоящей, например, из первой и третьей или первой и четвёртой строк. Получается *таблица распределения частот и таблица распределения процентных частот*.

Шаг 3) обработки данных измерения состоит в графическом, визуальном изображении имеющейся информации. Хорошо известен табличный способ задания функций. Таблицы мы уже получили в шаге 2). Если их рассматривать как задание некоторых функций, то можно построить и графики функций. Аргументами

Многоугольник распределения кратностей

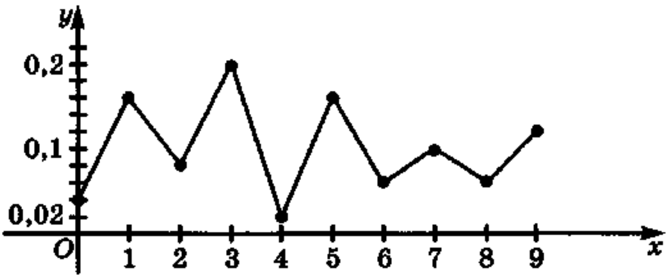


Варианты	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Всего: 10
Кратности	2	8	4	10	1	8	3	5	3	6	Сумма: 50

Рис. 116

этих функций являются варианты, а значениями функций — либо кратности вариант, либо частоты, либо их процентные частоты в зависимости от того, какой именно график мы строим. Для наглядности точки графиков соединяют отрезками. Будут получаться ломаные, которые называют *многоугольниками распределения*. Как это выглядит в разбираемом примере, показано на рис. 116, 117, 118.

Многоугольник распределения частот

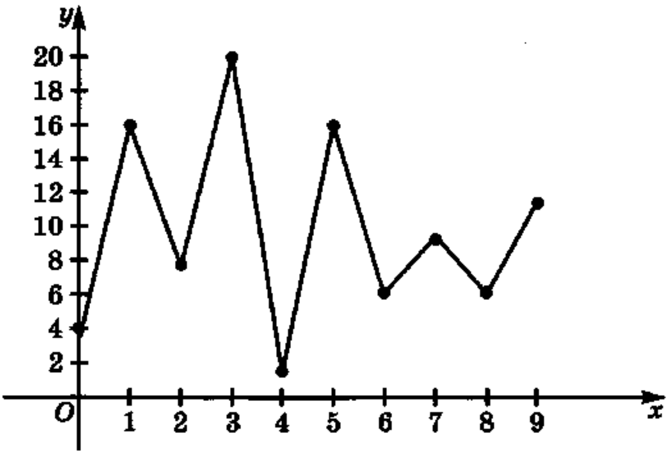


Варианты	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Всего: 10
Частоты	0,04	0,16	0,08	0,2	0,02	0,16	0,06	0,1	0,06	0,12	Сумма: 1

Рис. 117

Мы видим, что три вида графиков отличаются друг от друга только линейными изменениями вдоль оси ординат. В зависимости от конкретной ситуации выбирают один из графиков, по нему легко можно восстановить два других графика.

Многоугольник распределения процентных частот



Варианты	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Всего: 10
Частоты (%)	4	16	8	20	2	16	6	10	6	12	Сумма: 100

Рис. 118

При построении многоугольника распределения кратностей мы последовательно соединили отрезками точки (0; 2), (1; 8), (2; 4), (3; 10), (4; 1), (5; 8), (6; 3), (7; 5), (8; 3), (9; 6).

Есть и иной способ графического оформления. Каждую из вариант 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 сделаем серединой отрезка единичной длины, расположенного на оси абсцисс: 0 — середина отрезка [−0,5; 0,5], 1 — середина отрезка [0,5; 1,5], 2 — середина [1,5; 2,5], ..., 9 — середина [8,5; 9,5] (рис. 119). Построим

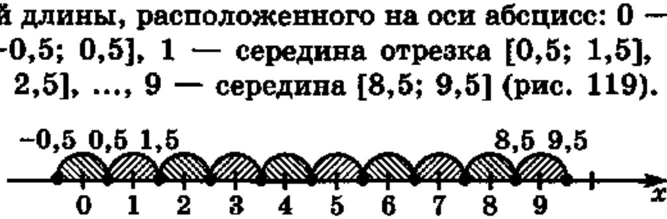


Рис. 119

10 прямоугольников: их горизонтальными сторонами являются построенные отрезки [−0,5; 0,5], [0,5; 1,5], ..., [8,5; 9,5], а высоты равны кратностям соответствующих вариант (рис. 120). Другими словами, вертикальные отрезки, ведущие в вершины многоугольника распределения, мы «раздули» до прямоугольников одинаковой (единичной) ширины, а высоты оставили прежними. Значит, площадь каждого из прямоугольников равна кратности варианты, попавшей в этот прямоугольник. Получилась ступенчатая фигура, которую называют *гистограммой распределения.*

Как правило, гистограммы строят в тех случаях, когда приходится первоначальную группировку данных проводить более

Гистограмма распределения кратностей

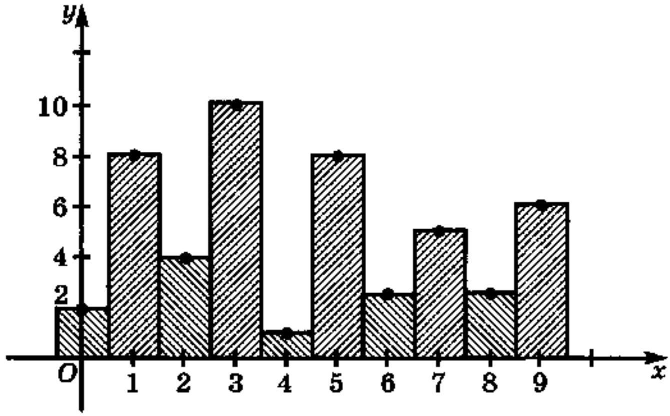


Рис. 120

крупными «блоками». Это весьма типично, когда количество вариант измерения велико. Например, если выписать цены всех покупок в крупном продуктовом магазине за день, то упорядоченная по возрастанию последовательность данных может состоять из *тысяч* чисел. Тогда все цены условно делят на группы (ценовые категории), например, «до 100 р.», «до 200 р.», ..., «свыше 2000 р.». Тут будет 21 варианта, что, конечно, значительно удобнее при обработке информации.

Продемонстрируем, как работает укрупнение группировки данных на уже известном примере измерения. Напомним, что простейшая группировка привела к такому ряду данных:

$$\underbrace{0, 0,}_{2}\ \underbrace{1, \ldots, 1,}_{8}\ \underbrace{2, \ldots, 2,}_{4}\ \underbrace{3, \ldots, 3,}_{10}\ \underbrace{4,}_{1}\ \underbrace{5, \ldots, 5,}_{8}$$

$$\underbrace{6, 6, 6,}_{3}\ \underbrace{7, \ldots, 7,}_{5}\ \underbrace{8, 8, 8,}_{3}\ \underbrace{9, \ldots, 9.}_{6}$$

Этот ряд данных разобьём на группы, каждая из которых содержит по две последовательные варианты, взятые с соответствующей кратностью. Получится вот что:

$$\underbrace{\underbrace{0, 0,}_{2}\ \underbrace{1, \ldots, 1,}_{8}}_{10}\ \underbrace{\underbrace{2, \ldots 2,}_{4}\ \underbrace{3, \ldots, 3,}_{10}}_{14}\ \underbrace{\underbrace{4,}_{1}\ \underbrace{5, \ldots, 5,}_{8}}_{9}$$

$$\underbrace{\underbrace{6, 6, 6,}_{3}\ \underbrace{7, \ldots, 7,}_{5}}_{8}\ \underbrace{\underbrace{8, 8, 8,}_{3}\ \underbrace{9, \ldots, 9.}_{6}}_{9}$$

Для новой группировки составим новую таблицу распределения кратностей.

Варианты	0 или 1	2 или 3	4 или 5	6 или 7	8 или 9	Всего: 5
Кратности	10	14	9	8	9	Сумма: 50

Расположим на оси абсцисс пять отрезков длиной 2 каждый:

$$[-0,5;\ 1,5],\ [1,5;\ 3,5],\ \ldots,\ [7,5;\ 9,5].$$

Первый из этих отрезков содержит первую варианту «0 или 1», второй отрезок содержит вторую варианту «1 или 2» и т. д. (рис. 121).

Рис. 121

Построим 5 прямоугольников. Их горизонтальными сторонами являются построенные отрезки длины 2, а их высоты таковы, что площадь равна кратности новой варианты, попавшей в этот прямоугольник (рис. 122).

Гистограмма распределения кратностей
(удвоенная ширина столбцов)

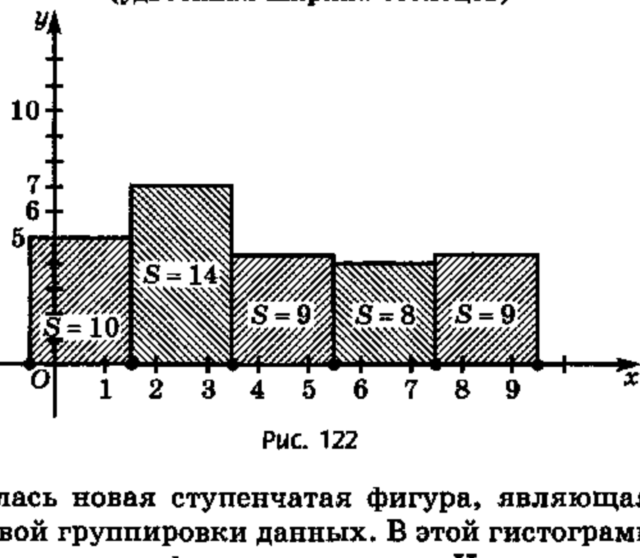


Рис. 122

Получилась новая ступенчатая фигура, являющаяся гистограммой новой группировки данных. В этой гистограмме некоторая первоначальная информация утеряпа. Например, судя только по этой ступенчатой фигуре, мы уже не можем точно определить, какой была первоначальная кратность варианты 1 или варианты 7. Зато новая гистограмма выглядит более просто, да и само новое распределение более равномерно. Правда, с равномерностью можно и переборщить. Если увеличивать ширину столбиков гистограммы, то их количество будет уменьшаться и при ширине 10 по оси абсцисс получится один столбик (рис. 123). Конечно, это самый простой вариант. Но в нём от первоначальной информации уже почти ничего не остаётся. Так что тут приходится искать равновесие между простотой изображения и точностью его соответствия данным измерения. В учебной практике шаг разбиения по оси абсцисс, как правило, сообщён при постановке самой задачи. При самостоятельной работе решение о выборе шага разбиения следует принимать самостоятельно.

Гистограмма распределения кратностей (удесятирённая ширина столбцов)

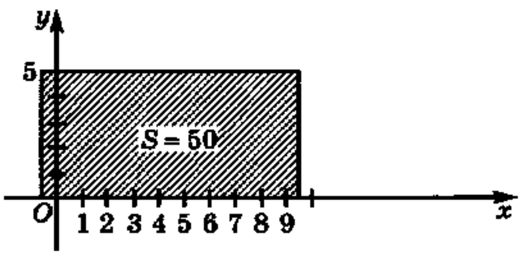


Рис. 123

Перейдём к заключительному шагу 4) обработки данных. Тут от всей первоначальной информации останется всего несколько чисел, своего рода краткий *паспорт ряда данных*. Подчеркнём, что различие между конкретным рядом данных и его числовым паспортом примерно такое же, как и различие между конкретным человеком и его общегражданским паспортом. Однако при оперировании массивами данных огромных объёмов приходится заменять эти массивы их краткими числовыми характеристиками.

Итак, пусть имеется упорядоченный по возрастанию ряд данных, полученных в результате некоторого измерения:

$$x_1 \leqslant x_2 \leqslant x_3 \leqslant \ldots \leqslant x_{n-1} \leqslant x_n.$$

Количество n всех данных — это уже встречавшаяся нам характеристика ряда, а именно *объём* ряда данных измерения. Разность $x_n - x_1$ называют *размахом* измерения. Другими словами, размах равен разности между наибольшей вариантой и наименьшей вариантой. На графике — это длина области определения многоугольника распределения. *Мода ряда данных* — это варианта, которая встречается в ряду чаще остальных вариант.

Другими словами, мода равна варианте, кратность которой является наибольшей. На графике — это точка, в которой достигается максимум многоугольника частот.

Медианой ряда из нечётного числа данных $x_1 \leqslant x_2 \leqslant \ldots \leqslant x_{2k} \leqslant \leqslant x_{2k+1}$ называют число $m = x_{k+1}$, а медианой ряда из чётного числа данных $x_1 \leqslant x_2 \leqslant \ldots \leqslant x_{2l-1} \leqslant x_{2l}$ называют число $m = \dfrac{x_l + x_{l+1}}{2}$. Геометрически медиана m ряда данных обладает тем свойством, что открытые лучи $(-\infty; m)$ и $(m; +\infty)$ содержат одинаковое количество данных этого ряда (рис. 124), т. е. медиана «делит пополам» данные по их количеству.

Одинаковое количество результатов измерения

Рис. 124

Наиболее привычной и часто встречающейся числовой характеристикой данных измерения является их *среднее арифметическое* значение, или просто *среднее* значение M.

> ***Для нахождения среднего значения следует:***
> 1) ***найти сумму всех данных измерения;***
> 2) ***полученную сумму разделить на количество данных.***
>
> $$M = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}.$$

Среднее значение данных измерения имеет наглядный физический смысл. На оси абсцисс отметим точки, координаты которых равны вариантам ряда данных. Единичную массу разделим пропорционально кратностям этих вариант. Другими словами, в первую точку поместим массу, равную частоте первой варианты; во вторую точку поместим массу, равную частоте второй варианты и т. д. Получится система материальных точек. Так вот её *центр тяжести* в точности совпадает со средним значением.

Вычислим перечисленные числовые характеристики для заданного в начале параграфа ряда данных:

$$\underbrace{0,\ 0}_{2},\quad \underbrace{1,\ \ldots,\ 1}_{8},\quad \underbrace{2,\ \ldots,\ 2}_{4},\quad \underbrace{3,\ \ldots,\ 3}_{10},\quad \underbrace{4}_{1},\quad \underbrace{5,\ \ldots,\ 5}_{8},$$

$$\underbrace{6,\ 6,\ 6}_{3},\quad \underbrace{7,\ \ldots,\ 7}_{5},\quad \underbrace{8,\ 8,\ 8}_{3},\quad \underbrace{9,\ \ldots,\ 9}_{6}.$$

Объём равен $50 = 2 + 8 + 4 + 10 + 1 + 8 + 3 + 5 + 3 + 6$. *Размах* равен 9 ($9 = 9 - 0$). *Мода* равна 3: эта варианта встретилась чаще других. Так как число данных чётно, то для нахождения *медианы* m отсчитаем половину чисел в упорядоченном ряду данных, начиная с наименьшего ($25 = 2 + 8 + 4 + 10 + 1$), и вычислим полусумму 25-го и 26-го чисел: $\frac{4 + 5}{2} = 4{,}5$. Значит, $m = 4{,}5$, и слева и справа от этого числа лежит ровно по 25 данных измерения. *Среднее арифметическое* удобно вычислять, используя уже проведённую группировку ряда:

$$M = \frac{0 \cdot 2 + 1 \cdot 8 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 10 + 4 \cdot 1 + 5 \cdot 8 + 6 \cdot 3 + 7 \cdot 5 + 8 \cdot 3 + 9 \cdot 6}{50} =$$

$$= 0 \cdot 0{,}04 + 1 \cdot 0{,}16 + 2 \cdot 0{,}08 + 3 \cdot 0{,}2 + 4 \cdot 0{,}02 + 5 \cdot 0{,}16 +$$
$$+ 6 \cdot 0{,}06 + 7 \cdot 0{,}1 + 8 \cdot 0{,}06 + 9 \cdot 0{,}12 = 4{,}42.$$

Мы на конкретном примере объяснили следующее правило нахождения среднего арифметического.

> *Для нахождения среднего значения данных можно:*
> 1) *каждую варианту умножить на её частоту;*
> 2) *сложить все полученные произведения.*

Это правило удобно в тех случаях, когда данные измерения уже приведены вместе с частотами их распределения.

Теорема. (Свойства среднего значения.) 1) ***Если M — среднее чисел $x_1, x_2, ..., x_n$, то aM — среднее чисел $ax_1, ax_2, ..., ax_n$.***

2) ***Если M — среднее чисел $x_1, x_2, ..., x_n$, то $M + b$ — среднее чисел $x_1 + b, x_2 + b, ..., x_n + b$.***

3) ***Для того чтобы число c равнялось среднему чисел $x_1, x_2, ..., x_n$, необходимо и достаточно, чтобы сумма отклонений $(x_1 - c) + (x_2 - c) + ... + (x_n - c)$ равнялась нулю.***

Доказательство.

1) $\frac{ax_1 + ax_2 + ... + ax_n}{n} = a \cdot \frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n} = aM.$

2) $\frac{(x_1 + b) + (x_2 + b) + ... + (x_n + b)}{n} = \frac{x_1 + x_2 + ... + x_n + nb}{n} = M + b.$

3) $(x_1 - c) + (x_2 - c) + ... + (x_n - c) = 0$; $x_1 + x_2 + ... + x_n = nc$;

$$c = \frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n} = M.$$

Теорема доказана.

Среднее, мода и медиана относятся к одному и тому же типу числовых характеристик ряда данных. Иногда их называют

Рис. 125

мерами центральной тенденции: каждое из этих чисел по-своему описывает некоторое центральное значение ряда данных.

Например, при поиске нового места работы довольно естественно спросить о средней зарплате на интересующем вас предприятии. Однако может так случиться, что ответ о большом значении M введёт вас в заблуждение. Например, если медиана m или мода размеров зарплаты много меньше, чем M, то это означает, что на данном предприятии небольшое число работников получает очень большую зарплату, а большинство работников получает сравнительно маленькую зарплату (рис. 125).

В таком случае, видимо, стоит интересоваться средней зарплатой не на всём предприятии, а в более узком секторе должностей, одну из которых вы предполагаете занять.

Как следует из теоремы, среднее M ряда чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$ специально определяется так, чтобы сумма отклонений $(x_1 - M) + (x_2 - M) + \ldots + (x_n - M)$ равнялась нулю. Другими словами, если после получения n данных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ того или иного измерения мы в ответе укажем только одно число — среднее M всех данных, то алгебраическая сумма ошибок $x_i - M$ измерения будет нулевой.

Последние числовые характеристики данных измерения, с которыми мы познакомимся, будут учитывать уже *квадраты ошибок* $(x_i - M)^2$. Характеристику, «отвечающую» за разброс чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$ вокруг их среднего значения M, называют *дисперсией* и обозначают D:

$$D = \frac{(x_1 - M)^2 + (x_2 - M)^2 + \ldots + (x_n - M)^2}{n}.$$

Итак, дисперсия D числовых данных равна среднему арифметическому квадратов отклонений этих данных от их среднего значения M. Значение квадратного корня из дисперсии называют *средним квадратическим отклонением* и обозначают σ: $\sigma = \sqrt{D}$.

Если дисперсия D или среднее квадратическое отклонение σ достаточно малы, то большинство из ошибок измерения $x_i - M$

невелики по модулю. Это значит, что числа $x_1, x_2, \ldots, x_n$ в основной своей массе довольно тесно группируются вокруг M. Другими словами, если $D = 0$, то $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = M$, и, грубо говоря, если $D \approx 0$, то $x_i \approx M$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$.

Подсчёт дисперсии вручную — вещь довольно кропотливая. Лучше использовать ту или иную компьютерную программу. Если же проводить вычисления непосредственно, то во избежание путаницы и для контроля возможных ошибок лучше собирать результаты в таблицу.

В статистике существуют различные способы подсчёта дисперсии в виде таблицы. Мы ограничимся простейшим вариантом и найдём дисперсию результатов уже хорошо знакомого измерения пятидесяти случайным образом названных цифр (см. с. 199). Используем подсчитанное выше среднее $M = 4{,}42$ результатов измерения и продолжим таблицу распределения частот (рис. 117), для удобства разместив её вертикально.

Складывая все числа в последнем столбце, находим дисперсию и среднее квадратическое отклонение: $D = 0{,}781456 + 1{,}871424 + \ldots + 0{,}768984 + 2{,}517168 = 7{,}6836$, $\sigma = \sqrt{D} \approx 2{,}772$.

Мы видим, что рассмотренное нами измерение имеет довольно большое среднее квадратическое отклонение σ от среднего значения M. Это означает, что результаты данного измерения заметно «разбросаны» вокруг среднего значения. Дисперсия D и среднее квадратическое отклонение σ как раз и являются количественными оценками такого разброса.

Варианты x_i	Частоты ν_i	Отклонения $(x_i - M)$ от среднего	Квадраты $(x_i - M)^2$ отклонений	Произведения $\nu_i \cdot (x_i - M)^2$
0	0,04	−4,42	19,5364	0,781456
1	0,16	−3,42	11,6964	1,871424
2	0,08	−2,42	5,8564	0,468512
3	0,2	−1,42	2,0164	0,40328
4	0,02	−0,42	0,1764	0,003528
5	0,16	0,58	0,3364	0,053824
6	0,06	1,58	2,4964	0,149784
7	0,1	2,58	6,6564	0,66564
8	0,06	3,58	12,8164	0,768984
9	0,12	4,58	20,9764	2,517168

Вопросы для самопроверки

1. Опишите, в чём состоит упорядочивание и группировка данных.

2. Дайте определение частоты варианты. Почему частота не может быть больше 1?

3. Как по сгруппированному ряду данных составить таблицу распределения частот?

4. Чему равны мода и медиана ряда данных 3, 6, 7, 4, 5, 4, 6, 3, 3, 3, 5, 7, 8, 7, 5, 4, 5, 6, 5, 7, 6?

5. Сформулируйте два правила нахождения среднего значения.

6. Как изменится среднее значение ряда данных, если все данные уменьшить на 5?

7. Как изменится среднее значение ряда данных, если все данные уменьшить в 5 раз?

8. Как изменится дисперсия ряда данных, если все данные увеличить на 3?

9. Как изменится среднее квадратическое отклонение ряда данных, если все данные удвоить?

§ 25. Гауссова кривая. Закон больших чисел

В заключительном параграфе этой главы мы в определённом смысле объединим основные результаты двух предыдущих параграфов. Напомним, что в «статистическом» § 24 мы имели дело с данными каких-либо конкретных измерений, проведённых в реальности, а в «вероятностном» § 23 вычисляли вероятности случайных событий, т. е. работали с той или иной моделью реальности. Как же связаны между собой реальность и модель реальности? Насколько точно наши теоретические представления об окружающем мире соответствуют тому, что происходит на практике?

В основе объединения вероятности и статистики лежат два замечательных факта. Один из них — явление *статистической устойчивости*. Второй состоит в том, что во многих различных по своей природе статистических наблюдениях статистическая устойчивость может быть описана с помощью одной-единственной функции. Эта функция введена великим немецким математиком Карлом Гауссом (1777—1855). Она задаётся весьма сложной формулой

$$\boxed{\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}.}$$

График функции $y = \varphi(x)$ называют *гауссовой кривой* (рис. 126). Это колоколообразная кривая. Она имеет единственную точку максимума, симметрична относительно оси ординат, площадь под этой кривой равна единице. Она очень быстро асимптотически приближается к оси абсцисс:

Гауссова кривая
(кривая нормального распределения)

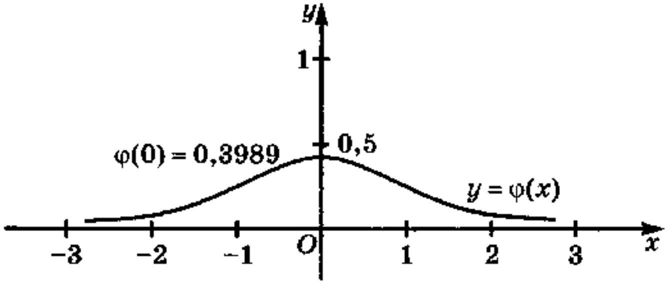


Рис. 126

если оценить площадь под гауссовой кривой на отрезке [−3; 3], то получится более 0,99, т. е. более 99% всей площади.

Удивительно, что в формуле для гауссовой функции одновременно присутствуют два замечательных иррациональных числа: π и e, в первоначальных определениях которых, казалось бы, нет ничего общего. Число π возникло при нахождении длины окружностей и площади кругов, а число e появляется в связи с введением показательных и логарифмических функций (см. § 19). Оказывается, что эти столь различные числа вместе используются при описании многих статистических и вероятностных явлений.

Расскажем, как гауссова кривая появляется при статистической обработке данных. Как мы видели, гистограммы (столбчатые диаграммы) распределения большого объёма информации незаменимы в случаях, когда ряд данных состоит из очень большого количества чисел, например, из сотен, тысяч, ... и т. п. Если ширина вертикальных столбцов гистограммы достаточно мала, а основания столбцов в объединении дают некоторый промежуток, то сама гистограмма похожа на график некоторой непрерывной функции, заданной на этом промежутке. Иногда такую функцию называют

Рис. 127

выравнивающей функцией. Например, на рис. 127 представлена гистограмма роста женщин, построенная по выборке, в которой было 1375 женщин.

Приведём пример из военного дела. Производилось 500 измерений боковой ошибки при стрельбе с самолёта. На графике (рис. 128) по оси абсцисс отложены величины ошибок (левее или правее цели), а по оси ординат — частоты этих ошибок.

Приведём пример из биологии. Измерялся размер 12000 бобов, и по оси абсцисс откладывались величины отклонений от среднего размера бобов, а по оси ординат — соответствующие частоты (рис. 129).

Примеры, как видите, взяты из совершенно различных областей, а графики функций, выравнивающих гистограммы, похожи друг на друга. Оказывается, что такому же закону подчиняется распределение и горошин по весу, и новорождённых младенцев по весу, и частиц газа по скорости движения, и множества других явлений окружающего нас мира. Подобно тому как графики всех парабол получаются с помощью линейных преобразований вдоль координатных осей из одной-единственной параболы $y = x^2$, все эти кривые распределения получаются из одной-единственной кривой, а именно из *гауссовой кривой*. Её очень часто называют также *кривой нормального распределения*.

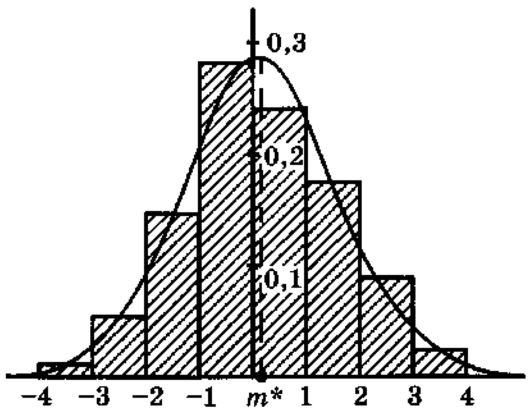


Рис. 128

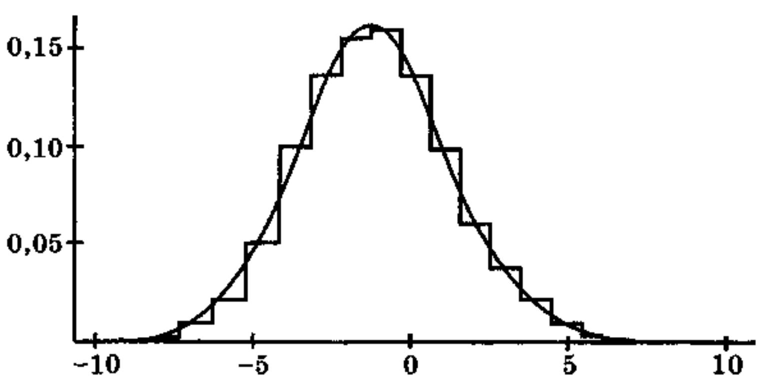


Рис. 129

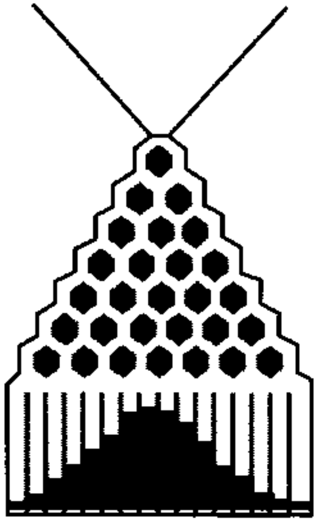


Рис. 130

Для наглядной демонстрации действия гауссова закона распределения иногда используют специальное устройство — *доску Гальтона* (по имени её изобретателя). В нём сыплющиеся сверху одинаковые шарики распределяются по ходам между правильными шестиугольниками и в результате попадают на горизонтальную поверхность, образуя картинку, похожую на «подграфик» гауссовой кривой (рис. 130).

В теории вероятностей гауссова кривая возникает при попытках практического использования формулы Бернулли (см. § 23). Теорема Бернулли даёт абсолютно точный ответ для вероятности $P_n(k)$ наступления k «успехов» в n независимых повторениях одного и того же испытания с двумя исходами: $P_n(k) = C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k}$. И это *хорошая новость* для нас. А вот и *плохая новость* — попробуйте по формуле из этой теоремы в точности вычислить, например, число $P_{100}(49)$:

$$P_{100}(49) = C_{100}^{49} \cdot (0{,}7)^{49} \cdot (0{,}3)^{51} = \frac{100!}{49! \cdot 51!} \cdot (0{,}7)^{49} \cdot (0{,}3)^{51}.$$

Оказывается, абсолютная точность не упрощает, а усложняет получение ответа в большинстве приложений! Но раз точные ответы для вероятности $P_n(k)$ вычислить сложно, то, может быть, существуют те или иные способы приближённых вычислений? И опять *хорошая новость*: да, такие приближения действительно возможны! Более того, удивительным образом оказалось, что в огромном числе различных ситуаций все эти приближения могут быть произведены с помощью одной-единственной функции — с помощью гауссовой функции $y = \varphi(x)$.

Доказал возможность такого использования функции $y = \varphi(x)$ французский математик Пьер Симон Лаплас (1749—1827). Но теперь опять *плохая новость*: гауссова функция $y = \varphi(x)$ задаётся, как мы отмечали выше, с помощью очень сложной формулы $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$, которая вряд ли применима для непосредственных вычислений. Наконец, последняя и *самая хорошая* с точки зрения приложений новость: для гауссовой функции $y = \varphi(x)$ имеются подробные таблицы её значений. Эти таблицы составлены для значений аргумента x с шагом 0,01 (см. приложение). Опишем способ использования гауссовой кривой для приближённых вычислений в теореме Бернулли.

Алгоритм использования функции $y = \varphi(x)$ в приближённых вычислениях

Для вычисления вероятности $P_n(k)$ следует:
1) проверить справедливость неравенства $npq \geqslant 10$;
2) вычислить x_k по формуле $x_k = \dfrac{k - np}{\sqrt{npq}}$;
3) по таблице значений гауссовой функции вычислить $\varphi(x_k)$;
4) предыдущий результат разделить на $\sqrt{npq}$.

$$P_n(k) \approx \frac{\varphi(x_k)}{\sqrt{npq}}.$$

Пример 1. Вероятность рождения мальчика примем равной 50%. Найти вероятность того, что среди 200 новорождённых будет: а) 110 мальчиков; б) 80 мальчиков.

Решение. Будем действовать по предложенному алгоритму. В нашем случае $n = 200$, $p = q = 0{,}5$. Значит, $npq = 50 > 10$ и $\sqrt{npq} \approx 7{,}07$. При этом в пункте а) число «успехов» k равно 110, а в пункте б) $k = 80$.

а) $x_k = \dfrac{k - np}{\sqrt{npq}} \approx \dfrac{110 - 100}{7{,}07} = \dfrac{10}{7{,}07} \approx 1{,}41$;

б) $x_k = \dfrac{k - np}{\sqrt{npq}} \approx \dfrac{80 - 100}{7{,}07} = -\dfrac{20}{7{,}07} \approx -2{,}83$.

Используя таблицы, вычисляем ответы:

а) $P_{200}(110) \approx \dfrac{\varphi(1{,}41)}{7{,}07} \approx \dfrac{0{,}1476}{7{,}07} \approx 0{,}02$;

б) $P_{200}(80) \approx \dfrac{\varphi(-2{,}83)}{7{,}07} = \dfrac{\varphi(2{,}83)}{7{,}07} \approx \dfrac{0{,}0073}{7{,}07} \approx 0{,}001$. ■

Вероятности $P_n(k)$, как правило, весьма малы. Это вполне объяснимо даже и без вычислений, на интуитивном уровне. Если монету бросить 1000 раз, то практически невероятно выпадение ровно 694 орлов или именно 427 решек и т. п. Поэтому при большом числе n в схеме Бернулли для числа k «успехов» устанавливают не одно точное значение, а некоторые рамки, в пределах которых разрешено меняться числу k. Например, найти вероятность того, что в 1000 бросаниях монеты орёл выпадет от 500 до 600 раз, или вероятность того, что среди 200 новорождённых будет от 70 до 110 мальчиков. Вероятность того, что число «успехов» k в n испытаниях Бернулли находится в пределах от k_1 до k_2, обозначают так: $P_n(k_1 \leqslant k \leqslant k_2)$.

Для вычисления вероятностей $P_n(k_1 \leqslant k \leqslant k_2)$ снова используют гауссову функцию $y = \varphi(x)$. Удобнее только ввести сначала некоторую дополнительную функцию Φ. Для этой функции также составлены таблицы значений (см. приложение), а связана она с φ следующим образом. Если аргумент x положителен, то $\Phi(x)$ равно площади под гауссовой кривой на

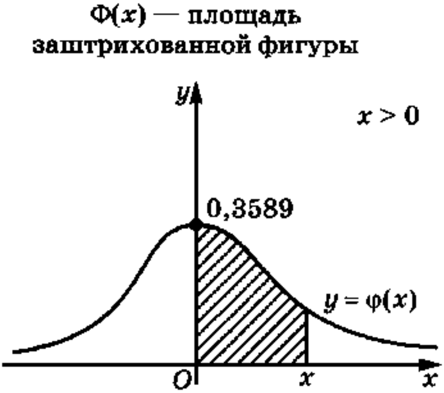


Рис. 131

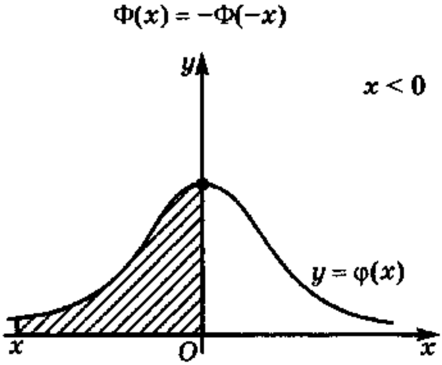


Рис. 132

отрезке от 0 до x (рис. 131). Более точно, $\Phi(x) = \int\limits_0^x \varphi(t)dt$. Если $x < 0$, то $\Phi(x) = -\Phi(-x)$. Наконец, $\Phi(0) = 0$ (рис. 132). Значит, функция Φ нечётна, а её график симметричен относительно начала координат. Ясно также, что эта функция возрастает на всей прямой. График функции $y = \Phi(x)$ изображён на рис. 133.

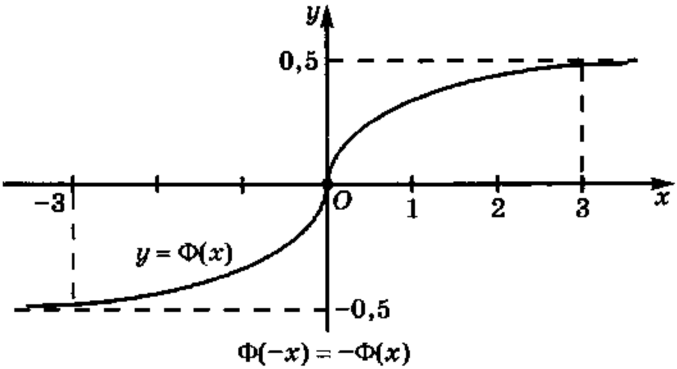


Рис. 133

Алгоритм использования функции $y = \Phi(x)$
в приближённых вычислениях

Для вычисления вероятности $P_n(k_1 \leqslant k \leqslant k_2)$ следует:

1) проверить справедливость неравенства $npq \geqslant 10$;

2) вычислить x_1 и x_2 по формулам

$$x_1 = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}, \quad x_2 = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}};$$

3) по таблице вычислить значения $\Phi(x_1)$ и $\Phi(x_2)$;

4) найти разность $\Phi(x_2) - \Phi(x_1)$.

$$P_n(k_1 \leqslant k \leqslant k_2) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1).$$

Рассмотрим внимательнее неравенство $npq \geqslant 10$ из условия 1) приведённого алгоритма. Так как $q = 1 - p$, то $pq = p(1 - p)$ и наибольшее значение этого квадратичного выражения (относительно p) достигается при $p = 0,5$. Наибольшее значение равно 0,25. Значит,

$$0,25n \geqslant npq \geqslant 10.$$

Поэтому из условия 1) следует, что $n \geqslant 40$. Это значит, что указанный алгоритм даёт хорошую точность приближения, когда испытание с двумя исходами независимо повторяется как минимум несколько десятков раз. На практике чаще всего рассматривают *сотни* повторений. При меньшем числе повторений точность приближения резко ухудшается.

В общем случае для абсолютной погрешности такого приближения верна следующая оценка.

$$\left|P_n(k_1 \leqslant k \leqslant k_2) - (\Phi(x_2) - \Phi(x_1))\right| < C\,\frac{p^2 + q^2}{\sqrt{npq}},$$

где $C = 0,7656$. Ясно, что с возрастанием n эта абсолютная погрешность стремится к нулю.

Пример 2. Политика П. поддерживает в среднем 40% населения. Какова вероятность того, что из 1500 случайно опрошенных людей политика П. поддерживают: а) от 570 до 630 человек; б) от 600 до 660 человек?

Решение. Считаем, что опрос 1500 человек происходит независимо и что вероятность поддержки политика П. отдельным респондентом, т. е. вероятность p «успеха», равна 0,4. Тогда

$$q = 1 - p = 0,6 \text{ и } npq = 1500 \cdot 0,4 \cdot 0,6 = 360 > 10,\ \sqrt{npq} \approx 19.$$

Значит, мы имеем дело с частным случаем схемы Бернулли, в которой число «успехов» k находится в пределах от 570 до 630 в пункте а) и в пределах от 600 до 660 в пункте б).

а) $x_1 = \dfrac{k_1 - np}{\sqrt{npq}} = \dfrac{570 - 1500 \cdot 0,4}{19} = -\dfrac{30}{19} = -1,58;\ x_2 = 1,58.$

Поэтому $P_{1500}(570 \leqslant k \leqslant 630) = \Phi(x_2) - \Phi(x_1) = \Phi(1,58) - \Phi(-1,58) = 2\Phi(1,58) = 2 \cdot 0,4429 \approx 0,886.$

б) $x_1 = \dfrac{k_1 - np}{\sqrt{npq}} = \dfrac{600 - 600}{19} = 0;\ x_2 = \dfrac{k_2 - np}{\sqrt{npq}} = \dfrac{660 - 600}{19} = \dfrac{60}{19} \approx 3,16.$

Поэтому $P_{1500}(600 \leqslant k \leqslant 660) = \Phi(x_2) - \Phi(x_1) = \Phi(3,16) - \Phi(0) = \Phi(3,16) \approx 0,499.$

Ответ: а) 0,866; б) 0,499.

По таблицам значений функции Φ видно, что при $x > 3$ значения $\Phi(x)$ практически совпадают с 0,5. Рассмотрим достаточно показательный пример.

Пример 3. Известно, что 75% учеников начальной школы не имеют четвертных троек. Случайным образом выбрали 300 учеников. Какова вероятность того, что:

а) троечников среди них будет более 99;

б) троечников будет от 60 до 90?

Решение. Мы считаем, что проводится 300 независимых повторений одного и того же испытания: случайный выбор одного ученика и проверка того, является он троечником или нет. При этом «успехом» считается тот факт, что у выбранного ученика есть тройки. По условию

$n = 300$, $p = 0{,}25$, $q = 0{,}75$, $np = 75$, $npq = 75 \cdot 0{,}75 = 7{,}5^2$, $\sqrt{npq} = 7{,}5$.

В случае а) по условию $100 \leqslant k \leqslant 300$. Значит,

$$x_1 = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{100 - 75}{7{,}5} = \frac{25}{7{,}5} = 3{,}333\ldots;$$

$$x_2 = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{300 - 75}{7{,}5} = 30.$$

Значения функции Ф и в точке 3,333..., и в точке 30 практически совпадают с 0,5. Поэтому искомая вероятность

$$P_{300}(100 \leqslant k \leqslant 300) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1)$$

крайне невелика. С точностью до 0,1% она просто равна нулю.

В пункте б) по условию $60 \leqslant k \leqslant 90$. Значит,

$$P_{300}(60 \leqslant k \leqslant 90) \approx \Phi\left(\frac{90 - 75}{7{,}5}\right) - \Phi\left(\frac{60 - 75}{7{,}5}\right) =$$

$$= \Phi(2) - \Phi(-2) = 2\Phi(2) = 2 \cdot 0{,}4772 = 0{,}9544.$$

Ответ: а) 0 (с точностью до одной тысячной); б) 0,9544.

Замечание. В примере 3, б) мы видели, что с вероятностью более 95% число «успехов» находится в пределах от 60 до 90, т. е. в среднем находится «рядом» с числом $75 = np$. Этот эффект легко объяснить, если вспомнить алгоритм использования функции φ:

$$P_n(k) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \varphi\left(\frac{k - np}{\sqrt{npq}}\right).$$

Так как функция φ принимает наибольшее значение при $x = 0$, то вероятность $P_n(k)$ принимает наибольшее значение при $k = np$, т. е. когда числитель дроби обращается в нуль. Значит, число np практически совпадает с *наивероятнейшим числом* «успехов» в n испытаниях Бернулли. Тем самым мы другим, «табличным», способом доказали теорему, которой заканчивался § 23.

Завершим этот параграф описанием явления *статистической устойчивости*. Допустим, что мы провели n независимых повторений испытания с двумя исходами и пусть «успех» мы наблюдали ровно k раз. Тогда число $\frac{k}{n}$ естественно назвать *частотой* «успеха». Насколько же частота «успеха» в n испытаниях Бернулли отличается от вероятности p «успеха» в одном испытании? Использование функций φ и Ф позволяет *доказать*, что при достаточно большом числе n повторений испытания с двумя исходами числа $\frac{k}{n}$ и p практически совпадут.

Пример 4. Известно, что 90 % жителей некоторой страны ни разу не ели авокадо. Случайным образом выбрали n жителей и выяснили число k тех из них, которые не ели авокадо. Насколько большим должно быть n, чтобы с вероятностью более 60 % можно было утверждать, что частота $\frac{k}{n}$ отличается от 0,9 не более чем на 0,01?

Решение. По условию $p = 0{,}9$, $q = 0{,}1$, $np = 0{,}9n$, $npq = 0{,}09n$, $\sqrt{npq} = 0{,}3\sqrt{n}$. В отличие от предыдущих задач неизвестным является само число n независимых повторений испытания. Условие, что частота $\frac{k}{n}$ отличается от 0,9 не более чем на 0,01, запишем неравенством

$$\left|\frac{k}{n} - 0{,}9\right| \leqslant 0{,}01 \Leftrightarrow |k - 0{,}9n| \leqslant 0{,}01n \Leftrightarrow 0{,}89n \leqslant k \leqslant 0{,}91n.$$

Для нахождения вероятности того, что последнее двойное неравенство верно, используем функцию Ф:

$$P_n(0{,}89n \leqslant k \leqslant 0{,}91n) \approx \Phi\left(\frac{0{,}91n - 0{,}9n}{0{,}3\sqrt{n}}\right) - \Phi\left(\frac{0{,}9n - 0{,}89n}{0{,}3\sqrt{n}}\right) =$$

$$= 2\Phi\left(\frac{0{,}01}{0{,}3}\sqrt{n}\right) = 2\Phi\left(\frac{\sqrt{n}}{30}\right).$$

По условию эта вероятность должна быть не менее чем 0,6. Значит,

$$2\Phi\left(\frac{\sqrt{n}}{30}\right) \geqslant 0{,}6 \Leftrightarrow \Phi\left(\frac{\sqrt{n}}{30}\right) \geqslant 0{,}3 \approx \Phi(0{,}84) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{n}}{30} \geqslant 0{,}84 \Rightarrow \sqrt{n} \geqslant 25{,}2 \Rightarrow n \geqslant 635.$$

Приближение $0{,}3 \approx \Phi(0{,}84)$ получено из таблиц значений функции Ф.

Ответ: следует опросить не менее чем 635 жителей.

Обратим специальное внимание на полученное в примере 4 равенство

$$P\left(\left|\frac{k}{n} - 0{,}9\right| \leqslant 0{,}01\right) = P_n(0{,}89n \leqslant k \leqslant 0{,}91n) \approx 2\Phi\left(\frac{\sqrt{n}}{30}\right).$$

Как мы уже заметили, значения $\Phi(x)$ функции Ф при $x > 3$ с точностью до тысячных совпадают с 0,5. В данном случае это означает, что если

$$\frac{\sqrt{n}}{30} > 3, \text{ т. е. } n > 8100,$$

то с вероятностью 0,999 можно утверждать, что частота $\frac{k}{n}$ «успеха» будет отличаться от вероятности $p = 0{,}9$ «успеха» менее чем на 0,01. При неограниченном увеличении числа n повторений испытания вероятность того, что $\left|\frac{k}{n} - 0{,}9\right| \leqslant 0{,}01$, стремится к единице. Довольно часто в таких случаях говорят: «Практически достоверно, что частота наступления "успеха" (с заданной степенью точности) совпадет с вероятностью появления "успеха"». Мы на конкретном примере убедились в справедливости одного из важнейших законов теории вероятностей — **закона больших чисел**.

> ***Для каждого положительного числа r при неограниченном увеличении числа n независимых повторений испытания с двумя исходами вероятность того, что частота $\frac{k}{n}$ появления «успеха» отличается менее чем на r от вероятности p «успеха» в одном отдельном испытании, стремится к единице.***

На самом деле правильнее было бы говорить, что мы познакомились с одним из простейших вариантов многочисленных законов больших чисел, которые применимы не только к испытаниям с двумя исходами, но верны для куда более сложно устроенных серий независимых испытаний. Подчеркнём, что закон больших чисел отличается от утверждения о том, что $\lim\limits_{n \to \infty}\left|\frac{k}{n} - p\right| = 0$, как это понимается в теории пределов числовых последовательностей (см. § 38 учебника для 10-го класса). Никто не гарантирует, что для любого $r > 0$ *при всех достаточно больших n* верно неравенство $\left|\frac{k}{n} - p\right| \leqslant r$. Вполне может так случиться, что при каких-то, пусть даже и очень больших n, верно противоположное неравенство $\left|\frac{k}{n} - p\right| > r$. В законе больших чисел утверждается лишь, что вероятность такого сорта ошибки стремится к нулю. В математике в таких случаях говорят, что имеет место «сходимость по вероятности».

Итак, использование гауссовых функций φ и Φ убедительно подтверждает явление *статистической устойчивости*: при большом числе независимых повторений одного и того же испытания в неизменных условиях практически достоверно, что частота появления фиксированного случайного события совпадает (с заданной степенью точности) с некоторым постоянным числом. Это явление и называют *статистической устойчивостью*, а такое число называют *статистической вероятностью события*. Одной из форм явления статистической устойчивости является приведённый выше закон больших чисел.

В частности, если нам неизвестна вероятность случайного события A, которое может происходить или не происходить в результате некоторого испытания, то мы можем многократно повторять это испытание и вычислять частоту наступления этого события A. При большом числе повторений практически несомненно, что таким образом найденная частота приблизительно будет равна вероятности $P(A)$ этого случайного события.

Вопросы для самопроверки

1. Нарисуйте эскиз графика гауссовой кривой $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$.

2. Вычислите приближённо наибольшее значение функции φ.

3. Укажите промежутки возрастания и убывания гауссовой кривой.

4. Чему равна площадь фигуры, ограниченной осью абсцисс и графиком гауссовой кривой?

5. Сформулируйте алгоритм использования функции φ в приближённых вычислениях по схеме Бернулли.

6. Сформулируйте алгоритм использования функции Φ в приближённых вычислениях по схеме Бернулли.

Исторические сведения

Упоминание о геометрических вероятностях имеется в одной из рукописей Ньютона (ок. 1665). Первый опубликованный текст относится к 1692 г., когда перевод на английский язык книги голландского учёного Христиана Гюйгенса (1629—1695) «О расчётах в азартных играх» был дополнен задачей о случайном расположении параллелепипеда на плоскости. В нескольких работах французского естествоиспытателя Жоржа Луи Бюффона (1707—1788) рассматривались задачи о бросаниях иглы (или монеты) на плоскость, разделённую параллельными прямыми (или квадратами). В учебнике 1846 г. Виктора Яковлевича Буняковского (1804—1889) задачи на геометрические вероятности выделены в отдельную главу. «Задача о встрече» (см. пример 5, § 22) появилась в английской учебной литературе в конце XIX в. Французский математик Жозеф Луи Бертран (1822—1900) в книге «Исчисление вероятностей» (1899) обосновал необходимость построения точных математических моделей при вычислении геометрических вероятностей. К середине XX в. после работ Андрея Николаевича Колмогорова (1903—1987) геометрические вероятности стали частью общей теории меры.

Схема Бернулли, как и теорема Бернулли (см. § 23), и простейшие формы закона больших чисел (см. § 25) были получены в 1689 г. Якобом Бернулли (1654—1705) и приведены в его трактате «Искусство предположений» в 1713 г. На появление этих результатов существенное значение оказали работы 1678 и 1688 гг. статистиков Джона Граунта и Вильяма Петти о смертности и о прогнозах по народонаселению в Лондоне. Появление функций вида $y = e^{-x^2}$ в вычислении вероятностей связывают с работами (1709) Николая Бернулли (1687—1759), племянника Якоба и Иоганна Бернулли. Француз Абрахам де Муавр (1667—1754), проживший почти всю жизнь в Англии (Муавр был гугенотом), в цикле своих работ начиная с 1718 г. обосновал алгоритмы использования функций φ и Φ (см. § 25). Позже в несколько других терминах их передоказал французский учёный Пьер-Симон Лаплас (1749—1827)[1]. Теоремы о приближённых вычислениях вероятностей в схеме Бернулли теперь называют теоремами Муавра — Лапласа. Лаплас специально отметил необходимость предположения о равновозможности исходов в классическом определении вероятности.

Термин «статистика» происходит от латинского *stato* (государство), *status* (состояние, положение). Первыми в истории статистическими данными являлись данные о переписи населения во многих странах. Например, имеются сведения о проведении переписи ещё в 2240 г. до н. э. в Китае. Регулярные исследования, связанные со структурой и распределением населения, его смертности, расчёта рент или, как тогда говорили, по «политической арифметике» стали проводиться в Англии во второй половине XVII в. С тех пор статистика традиционно является существенной образовательной составляющей в школах англоязычных стран. Отдельный курс статистики имелся и в ряде российских гимназий XIX в.

У Ньютона имеются исследования по хронологии древних царств и статистике длительности правления в них. Гюйгенс строил кривую убывания живых современников в зависимости от возраста. Использование статистической частоты $\frac{k}{n}$ вместо «априорной» вероятности было широко распространено в работах Н. Бернулли, Д. Бернулли, Э. Галлея, А. Муавра, Ж. Бюффона, Л. Эйлера и многих других учёных XVIII в. С использованием статистических идей Альбертом Эйнштейном (1879—1955) в 1905 г. была создана теория броуновского движения частиц. Одним из основателей современной математической статистики является английский учёный Карл Пирсон (1857—1936). С его именем связано развитие числовых оценок *корреляции* (зависимости) между различными статистическими данными. Разнообразны разделы математической статистики; среди них можно выделить *описательную статистику*, *теорию оценивания*, *теорию проверки гипотез*, *последовательный статистический анализ* и т. п.

[1] В 1785 г. Лаплас экзаменовал 17-летнего абитуриента Бонапарта и высоко оценил его знания. Много позже, после выхода «Небесной механики», между Лапласом и (уже) Наполеоном состоялся известный диалог: «Н: Вы написали такую огромную книгу о системе мира и ни разу не упомянули о его Творце! Л: Сир, я не нуждался в этой гипотезе».

ГЛАВА 6 Уравнения и неравенства. Системы уравнений и неравенств

Изучая курс алгебры, вы постоянно решали уравнения и неравенства с одной переменной, системы уравнений с двумя переменными, системы неравенств с одной переменной. В этой главе, завершающей изучение школьного курса алгебры и начал математического анализа, мы снова обращаемся к уравнениям и неравенствам, чтобы рассмотреть их с самых общих позиций. Это будет, с одной стороны, своеобразное подведение итогов и, с другой стороны, некоторое расширение и углубление ваших знаний.

§ 26. Равносильность уравнений

В этом параграфе речь пойдёт о принципиальных вопросах, связанных с решением уравнений с одной переменной на множестве действительных чисел: что такое равносильные уравнения; какие преобразования уравнений являются равносильными, а какие — нет; когда надо делать проверку найденных корней и как её делать. Эти вопросы мы обсуждали в курсе алгебры, начиная с 8-го класса, да и в настоящем учебнике о них уже шла речь, например, при решении показательных и логарифмических уравнений. Почему мы снова к ним возвращаемся? Потому что, завершая изучение школьного курса алгебры и начал математического анализа, целесообразно как бы заново переосмыслить общие идеи и методы.

Определение 1. Два уравнения с одной переменной $f(x) = g(x)$ и $p(x) = h(x)$ называют **равносильными**, если множества их корней совпадают.

Иными словами, два уравнения называют *равносильными*, если они имеют одинаковые корни или если оба уравнения не имеют корней.

Например, уравнения $x^2 - 4 = 0$ и $(x + 2)(2^x - 4) = 0$ равносильны, оба они имеют по два корня: 2 и −2. Равносильны и уравнения $x^2 + 1 = 0$ и $\sqrt{x} = -3$, поскольку оба они не имеют корней.

Определение 2. Если каждый корень уравнения

$$f(x) = g(x) \tag{1}$$

является в то же время корнем уравнения

$$p(x) = h(x), \tag{2}$$

то уравнение (2) называют **следствием уравнения** (1).

Например, уравнение $x - 2 = 3$ имеет корень $x = 5$, а уравнение $(x - 2)^2 = 9$ имеет два корня: $x_1 = 5$, $x_2 = -1$. Корень уравнения $x - 2 = 3$ является одним из корней уравнения $(x - 2)^2 = 9$. Значит, уравнение $(x - 2)^2 = 9$ — следствие уравнения $x - 2 = 3$.

Достаточно очевидным является следующее утверждение.

Два уравнения равносильны тогда и только тогда, когда каждое из них является следствием другого.

Схему решения любого уравнения можно описать так: заданное уравнение (1) преобразуют в уравнение (2) более простое, чем уравнение (1); уравнение (2) преобразуют в уравнение (3) более простое, чем уравнение (2), и т. д.: $(1) \to (2) \to (3) \to (4) \to \ldots$. В конце концов получают достаточно простое уравнение и находят его корни. В этот момент и возникает главный вопрос: совпадает ли множество найденных корней последнего уравнения с множеством корней исходного уравнения (1)? Если все преобразования были равносильными, т. е. если были равносильны уравнения (1) и (2), (2) и (3), (3) и (4) и т. д., то ответ на поставленный вопрос положителен: да, совпадает. Это значит, что, решив последнее уравнение цепочки, мы тем самым решим и первое (исходное) уравнение цепочки. Если же некоторые преобразования были равносильными, а в некоторых мы не уверены, но точно знаем, что переходили с их помощью к уравнениям-следствиям, то однозначного ответа на поставленный вопрос мы не получим.

Чтобы ответ на вопрос был более определённым, нужно все найденные корни последнего уравнения цепочки *проверить*, подставив их поочерёдно в исходное уравнение (1). Если проверка показывает, что найденный корень последнего уравнения цепочки не удовлетворяет исходному уравнению, его называют *посторонним корнем* и в ответ, естественно, не включают.

Вы, конечно, понимаете, что термин «более простое уравнение», вообще говоря, не поддаётся точному описанию. Обычно считают одно уравнение более простым, чем другое, по внешним признакам. Например, решая уравнение $2^{\sqrt{2x+7}} = 2^{x-3}$, получаем сначала $\sqrt{2x+7} = x - 3$; это иррациональное уравнение проще заданного «показательно-иррационального» уравнения. Далее, возведя обе части иррационального уравнения в квадрат, получим $2x + 7 = (x - 3)^2$; это рациональное уравнение проще, чем предыдущее иррациональное уравнение.

В итоге можно сказать, что решение уравнения, как правило, осуществляется в три этапа.

Первый этап — *технический*. На этом этапе осуществляют преобразования по схеме (1) → (2) → (3) → (4) → ... и находят корни последнего (самого простого) уравнения указанной цепочки.

Второй этап — *анализ решения*. На этом этапе, анализируя проведённые преобразования, отвечают на вопрос, все ли они были равносильными.

Третий этап — *проверка*. Если анализ, проведённый на втором этапе, показывает, что некоторые преобразования могли привести к уравнению-следствию, то обязательна проверка всех найденных корней их подстановкой в исходное уравнение.

Реализация этого плана связана с поисками ответов на четыре вопроса.

1. Как узнать, является ли переход от одного уравнения к другому равносильным преобразованием?

2. Какие преобразования могут перевести данное уравнение в уравнение-следствие?

3. Если мы в конечном итоге решили уравнение-следствие, то как сделать проверку в случае, когда она сопряжена со значительными вычислительными трудностями?

4. В каких случаях при переходе от одного уравнения к другому может произойти потеря корней и как этого не допустить?

Ответу на каждый из вопросов отведён отдельный пункт данного параграфа.

1. Теоремы о равносильности уравнений

Решение уравнений, встречающихся в школьном курсе алгебры, основано на шести *теоремах о равносильности* (все они в той или иной мере вам известны). Первые три теоремы — «спокойные», они гарантируют равносильность преобразований без каких-либо дополнительных условий, их использование не причиняет решающему никаких неприятностей.

Теорема 1. ***Если какой-либо член уравнения перенести из одной части уравнения в другую с противоположным знаком, то получится уравнение, равносильное данному.***

Теорема 2. ***Если обе части уравнения возвести в одну и ту же нечётную степень, то получится уравнение, равносильное данному.***

Теорема 3. ***Показательное уравнение*** $a^{f(x)} = a^{g(x)}$ **(где** $a > 0$, $a \neq 1$**)** ***равносильно уравнению*** $f(x) = g(x)$.

Следующие три теоремы — «беспокойные», они работают лишь при определённых условиях, а значит, могут доставить некоторые неприятности при решении уравнений. Прежде чем формулировать теоремы 4—6, напомним ещё об одном понятии, связанном с уравнениями.

Определение 3. **Областью определения уравнения** $f(x) = g(x)$ **или областью допустимых значений переменной (ОДЗ) называют множество тех значений переменной** x**, при которых одновременно имеют смысл выражения** $f(x)$ **и** $g(x)$.

Теорема 4. ***Если обе части уравнения*** $f(x) = g(x)$ ***умножить на одно и то же выражение*** $h(x)$***, которое:***

а) ***имеет смысл всюду в области определения (в области допустимых значений) уравнения*** $f(x) = g(x)$;

б) ***нигде в этой области не обращается в*** 0,

то получится уравнение $f(x)h(x) = g(x)h(x)$***, равносильное данному в его ОДЗ.***

Следствием теоремы 4 является ещё одно «спокойное» утверждение: *если обе части уравнения умножить или разделить на одно и то же отличное от нуля число, то получится уравнение, равносильное данному.*

Теорема 5. ***Если обе части уравнения*** $f(x) = g(x)$ ***неотрицательны в ОДЗ уравнения, то после возведения обеих его частей в одну и ту же чётную степень n получится уравнение*** $(f(x))^n = (g(x))^n$***, равносильное данному в его ОДЗ.***

Теорема 6. ***Пусть*** $a > 0$ ***и*** $a \neq 1$, X ***— решение системы неравенств*** $\begin{cases} f(x) > 0, \\ g(x) > 0. \end{cases}$ ***Тогда уравнение*** $\log_a f(x) = \log_a g(x)$ ***равносильно на множестве X уравнению*** $f(x) = g(x)$.

2. Преобразование данного уравнения в уравнение-следствие

В этом пункте мы ответим на второй вопрос: какие преобразования переводят данное уравнение в уравнение-следствие?

Частично ответ на этот вопрос связан с тремя последними теоремами. Можно сказать так: если в процессе решения уравнения мы применили заключение одной из теорем 4, 5, 6, не проверив выполнения ограничительных условий, заложенных в формулировке теоремы, то получится уравнение-следствие. Приведём примеры.

1) Уравнение $x - 1 = 3$ имеет один корень $x = 4$. Умножив обе части уравнения на $x - 2$, получим уравнение $(x - 1)(x - 2) = 3(x - 2)$, имеющее два корня: $x_1 = 4$ и $x_2 = 2$. Второй корень является посторонним для уравнения $x - 1 = 3$. Причина его появления состоит в том, что мы умножили обе части уравнения на одно и то же выражение, нарушив при этом условия теоремы 4. В этой теореме содержится требование: выражение, на которое мы умножаем обе части уравнения, нигде не должно обращаться в 0. Мы же умножили обе части уравнения на выражение $x - 2$, которое обращается в 0 при $x = 2$; именно это значение оказалось посторонним корнем.

2) Возьмём то же самое уравнение $x - 1 = 3$ и возведём обе его части в квадрат. Получим уравнение $(x - 1)^2 = 9$, имеющее два корня: $x_1 = 4$, $x_2 = -2$. Второй корень является посторонним для уравнения $x - 1 = 3$. Причина его появления состоит в том, что мы возвели обе части уравнения в одну и ту же чётную степень, нарушив при этом условие теоремы 5. В этой теореме содержится требование: обе части уравнения должны быть неотрицательны. Относительно выражения $x - 1$ это утверждать мы не можем.

3) Рассмотрим уравнение $\ln(2x - 4) = \ln(3x - 5)$. Потенцируя, получим уравнение $2x - 4 = 3x - 5$ с единственным корнем $x = 1$. Но этот корень является посторонним для заданного логарифмического уравнения, поскольку оба выражения под знаками логарифмов при $x = 1$ принимают отрицательные значения. Причина появления постороннего корня состоит в том, что мы, потенцируя (т. е. «освобождаясь» от знаков логарифмов), нарушили условия теоремы 6. В этой теореме содержится требование: выражения под знаками логарифмов должны быть положительными; о выражениях $2x - 4$ и $3x - 5$ этого утверждать мы не можем, так как они при одних значениях x положительны, при других — отрицательны.

В последнем примере переход от логарифмического уравнения к уравнению $2x - 4 = 3x - 5$ привёл к *расширению области определения уравнения*. Область определения логарифмического уравнения задаётся системой неравенств

$$\begin{cases} 2x - 4 > 0, \\ 3x - 5 > 0, \end{cases}$$

решив которую находим $x > 2$. Область же определения уравнения $2x - 4 = 3x - 5$ есть множество всех действительных чисел. По сравнению с логарифмическим уравнением она расширилась:

добавился луч $(-\infty; 2]$. Именно в эту добавленную часть и «угодил» посторонний корень $x = 1$.

Перечислим наиболее часто встречающиеся *причины расширения области определения уравнения.*

1. Освобождение в процессе решения уравнения от знаменателей, содержащих переменную величину.

2. Освобождение в процессе решения уравнения от знаков корней чётной степени.

3. Освобождение в процессе решения уравнения от знаков логарифмов.

Подведём итоги. Исходное уравнение преобразуется в процессе решения в уравнение-следствие, а значит, *обязательна проверка всех найденных корней*, если:

1) произошло расширение области определения уравнения;

2) осуществлялось возведение обеих частей уравнения в одну и ту же чётную степень;

3) выполнялось умножение обеих частей уравнения на одно и то же выражение с переменной (разумеется, имеющее смысл во всей области определения уравнения).

Пример 1. Решить уравнение $\sqrt{2x+5} + \sqrt{5x-6} = 5$.

Решение. Первый этап — *технический*. На этом этапе, как мы отмечали выше, осуществляют преобразования заданного уравнения по схеме $(1) \to (2) \to (3) \to (4) \to \ldots$ и находят корни последнего (самого простого) уравнения указанной цепочки.

Последовательно получаем:

$$\sqrt{5x-6} = 5 - \sqrt{2x+5};$$

$$\left(\sqrt{5x-6}\right)^2 = \left(5 - \sqrt{2x+5}\right)^2;$$

$$5x - 6 = 25 - 10\sqrt{2x+5} + 2x + 5;$$

$$10\sqrt{2x+5} = 36 - 3x;$$

$$\left(10\sqrt{2x+5}\right)^2 = (36 - 3x)^2;$$

$$100(2x + 5) = 1296 - 216x + 9x^2;$$

$$9x^2 - 416x + 796 = 0;$$

$$x_1 = 2,\ x_2 = 44\frac{2}{9}.$$

Второй этап — *анализ решения*. На этом этапе, анализируя проведённые преобразования, отвечают на вопрос, все ли они были равносильными. Замечаем, что в процессе решения уравнения дважды применялось неравносильное преобразование — возведение в квадрат; кроме того, расширилась область определения уравнения (были квадратные корни — были ограничения на переменную, не стало квадратных корней — не стало ограничений). Значит, решённое на последнем шаге первого этапа квадратное уравнение является уравнением-следствием для заданного уравнения. Проверка обязательна.

Третий этап — *проверка*. Подставим поочерёдно каждое из найденных значений переменной в исходное уравнение.

Если $x = 2$, то получаем $\sqrt{2 \cdot 2 + 5} + \sqrt{5 \cdot 2 - 6} = 5$, т. е. $3 + 2 = 5$ — верное равенство.

Если $x = 44\frac{2}{9}$, то получаем $\sqrt{2 \cdot 44\frac{2}{9} + 5} + \sqrt{5 \cdot 44\frac{2}{9} - 6} = 5$.

Это неверное равенство, поскольку уже первое подкоренное выражение явно больше чем 25, и потому корень из него больше чем 5, т. е. уже больше правой части равенства. Таким образом, $x = 44\frac{2}{9}$ — посторонний корень.

Ответ: 2.

3. О проверке корней

В этом пункте мы ответим на третий вопрос: как сделать проверку, если проверка корней с помощью их подстановки в исходное уравнение сопряжена со значительными вычислительными трудностями? Видимо, в таких случаях надо искать обходные пути проверки.

Вернёмся к примеру 1. Подстановка значения $x_1 = 2$ в заданное уравнение трудностей не представляла. Подстановку же второго значения $x_2 = 44\frac{2}{9}$ мы фактически заменили прикидкой. Мы прикинули, что $x_2 \approx 44$, значит, $\sqrt{2x_2 + 5} > 5$, и сразу стало ясно, что $x_2 = 44\frac{2}{9}$ — посторонний корень. Такая прикидка — один из обходных путей проверки.

Ещё раз вернёмся к примеру 1. Значение $x_2 = 44\frac{2}{9}$ можно было проверить не по исходному уравнению, а по полученному в процессе преобразований уравнению $10\sqrt{2x+5} = 36 - 3x$. По смыслу этого уравнения должно выполняться неравенство $36 - 3x \geqslant 0$, т. е. $x \leqslant 12$. Значение $x_2 = 44\frac{2}{9}$ этому условию не удовлетворяет, поэтому x_2 — посторонний корень.

Как правило, самый лёгкий обходной путь проверки — по области определения (ОДЗ) заданного уравнения.

Пример 2. Решить уравнение

$$\ln(x + 4) + \ln(2x + 3) = \ln(1 - 2x).$$

Решение. Первый этап. Воспользуемся правилом «сумма логарифмов равна логарифму произведения». Оно позволяет заменить выражение $\ln(x+4) + \ln(2x+3)$ выражением $\ln(x+4)(2x+3)$. Тогда заданное уравнение можно переписать в виде:

$$\ln(x + 4)(2x + 3) = \ln(1 - 2x).$$

Потенцируя, получаем:

$$(x + 4)(2x + 3) = (1 - 2x);$$
$$2x^2 + 8x + 3x + 12 = 1 - 2x;$$
$$2x^2 + 13x + 11 = 0;$$
$$x_1 = -1,\ x_2 = -5{,}5.$$

Второй этап. В процессе решения произошло расширение ОДЗ уравнения, значит, обязательна проверка.

Третий этап. Поскольку, кроме расширения ОДЗ уравнения, никаких других неравносильных преобразований в процессе решения уравнения не было, проверку можно выполнить по ОДЗ исходного уравнения. Она задаётся системой неравенств

$$\begin{cases} x + 4 > 0, \\ 2x + 3 > 0, \\ 1 - 2x > 0. \end{cases}$$

Значение $x = -1$ удовлетворяет этой системе неравенств, а значение $x = -5{,}5$ не удовлетворяет уже первому неравенству, это посторонний корень.

Ответ: -1.

Замечание 1. Каждый раз выделять при решении уравнения три этапа — технический, анализ, проверку — необязательно. Но всё это нужно «держать в голове» и уж во всяком случае понимать следующее: если анализ показал, что проверка обязательна, а вы её не сделали, то уравнение не может считаться решённым верно; тем более оно не может считаться решённым верно, если вы не сделали сам анализ.

П р и м е р 3. Решить уравнение

$$\frac{2x^3 - 5x^2}{x^2 - 1} + \frac{3}{2x - 2} = \frac{1}{2x + 2}.$$

Р е ш е н и е. Преобразуем заданное уравнение:

$$\frac{2x^3 - 5x^2}{(x - 1)(x + 1)} + \frac{3}{2(x - 1)} - \frac{1}{2(x + 1)} = 0;$$

$$\frac{4x^3 - 10x^2 + 3x + 3 - x + 1}{2(x - 1)(x + 1)} = 0;$$

$$\frac{2x^3 - 5x^2 + x + 2}{(x - 1)(x + 1)} = 0;$$

$$2x^3 - 5x^2 + x + 2 = 0.$$

Рассмотрим многочлен $p(x) = 2x^3 - 5x^2 + x + 2$. Заметим, что $x = 1$ — корень этого многочлена, поскольку $p(1) = 2 - 5 + 1 + 2 = 0$. Значит, многочлен $p(x)$ делится без остатка на двучлен $x - 1$ (см. § 1, следствие из теоремы 3). Воспользуемся схемой Горнера (см. § 1):

	2	-5	1	2
1	2	$2 \cdot 1 - 5 = -3$	$(-3) \cdot 1 + 1 = -2$	$(-2) \cdot 1 + 2 = 0$

Значит, $p(x) = (x - 1)(2x^2 - 3x - 2)$. Квадратный трёхчлен $2x^2 - 3x - 2$ имеет корни 2 и $-0{,}5$. Итак, корни уравнения $p(x) = 0$ мы нашли: 1, 2, $-0{,}5$.

Поскольку в процессе решения уравнения произошло расширение области его определения — за счёт освобождения от знаменателей, — обязательна проверка.

Замечаем, что при $x = 1$ знаменатель $(x - 1)(x + 1)$ обращается в нуль; это значение не является корнем заданного уравнения, т. е. $x = 1$ — *посторонний корень*.

При значениях $x = 2$ или $x = -0{,}5$ знаменатель $(x - 1)(x + 1)$ в нуль не обращается. Эти значения — корни исходного уравнения.

Ответ: 2; $-0{,}5$.

П р и м е р 4. Решить уравнение $\log_{x+4}(x^2 - 1) = \log_{x+4}(5 - x)$.

Р е ш е н и е. Потенцируя, получаем:

$$x^2 - 1 = 5 - x;$$
$$x^2 + x - 6 = 0;$$
$$x_1 = 2, \quad x_2 = -3.$$

Для проверки выпишем условия, задающие ОДЗ:

$$\begin{cases} x + 4 > 0, \\ x + 4 \neq 1, \\ x^2 - 1 > 0, \\ 5 - x > 0. \end{cases}$$

Значение $x = 2$ удовлетворяет всем условиям этой системы, а значение $x = -3$ не удовлетворяет второму условию; следовательно, $x = -3$ — посторонний корень.

Ответ: 2.

Замечание 2. Не переоценивайте способ проверки по ОДЗ: он является полноценным только в том случае, когда при решении уравнения других причин нарушения равносильности, кроме расширения ОДЗ, не было (это чаще всего бывает в логарифмических уравнениях). При решении же иррациональных уравнений, где используется метод возведения в чётную степень, способ проверки найденных корней по ОДЗ не выручит; лучше, если это возможно, делать проверку подстановкой.

4. О потере корней

В этом пункте мы ответим на четвёртый вопрос: в каких случаях при переходе от одного уравнения к другому может произойти потеря корней и как этого не допустить?

Укажем две *причины потери корней при решении уравнений*:

1) деление обеих частей уравнения на одно и то же выражение $h(x)$ (кроме тех случаев, когда точно известно, что всюду в области определения уравнения выполняется условие $h(x) \neq 0$);

2) сужение ОДЗ в процессе решения уравнения.

С первой причиной бороться нетрудно: приучайте себя переходить от уравнения $f(x)h(x) = g(x)h(x)$ к уравнению $h(x)(f(x) - g(x)) = 0$ (а не к уравнению $f(x) = g(x)$). Может быть, даже есть смысл вообще запретить себе деление обеих частей уравнения на одно и то же выражение, содержащее переменную.

Со второй причиной бороться сложнее. Рассмотрим, например, уравнение $\lg x^2 = 4$ и решим его двумя способами.

<u>Первый способ</u>. Воспользовавшись определением логарифма, находим: $x^2 = 10^4$; $x_1 = 100$, $x_2 = -100$.

<u>Второй способ</u>. Имеем: $2\lg x = 4$; $\lg x = 2$; $x = 100$.

Обратите внимание: при втором способе произошла потеря корня — «потерялся» корень $x = -100$. Причина в том, что вместо правильной формулы $\lg x^2 = 2\lg|x|$ мы воспользовались неправильной формулой $\lg x^2 = 2\lg x$, сужающей область определения выражения: область определения выражения $\lg x^2$ задаётся условием

$x \neq 0$ (т. е. $x < 0$, $x > 0$), тогда как область определения выражения $2\lg x$ задаётся условием $x > 0$. Область определения сузилась, из неё «выпал» открытый луч $(-\infty; 0)$, где как раз и находится «потерявшийся» при втором способе решения корень уравнения.

Вывод: применяя при решении уравнения какую-либо формулу (особенно тригонометрическую), следите за тем, чтобы области допустимых значений переменной для правой и левой частей формулы были одинаковыми.

Есть ещё одна причина, по которой может произойти потеря корней, её мы упомянем в начале § 27.

Вопросы для самопроверки

1. Даны два уравнения: $f(x) = g(x)$ и $p(x) = h(x)$. В каком случае их называют равносильными?

2. Известно, что оба уравнения $f(x) = g(x)$ и $p(x) = h(x)$ не имеют корней. Можно ли назвать их равносильными?

3. Даны два уравнения: $f(x) = g(x)$ и $p(x) = h(x)$. В каком случае уравнение $f(x) = g(x)$ является следствием уравнения $p(x) = h(x)$?

4. Даны два уравнения: $f(x) = g(x)$ и $p(x) = h(x)$. Известно, что каждое из них является следствием другого. Можно ли назвать эти уравнения равносильными?

5. Опишите три основных этапа решения уравнения с одной переменной.

6. Что называют областью определения (областью допустимых значений переменной — ОДЗ) уравнения $f(x) = g(x)$?

7. Какие вы знаете равносильные преобразования уравнения?

8. Какие вы знаете неравносильные преобразования уравнения?

9. Объясните, почему при переходе от уравнения $f(x) = g(x)$ к уравнению $(f(x))^2 = (g(x))^2$ могут появиться посторонние корни.

10. Объясните, почему при переходе от уравнения $\sqrt{f(x)} = \sqrt{g(x)}$ к уравнению $f(x) = g(x)$ могут появиться посторонние корни.

11. Объясните, почему при переходе от уравнения $\log_a f(x) = \log_a g(x)$ к уравнению $f(x) = g(x)$ могут появиться посторонние корни.

12. Объясните, почему при переходе от уравнения $\sqrt{f(x)} = g(x)$ к уравнению $f(x) = (g(x))^2$ могут появиться посторонние корни, а переход от уравнения $\sqrt[3]{f(x)} = g(x)$ к уравнению $f(x) = (g(x))^3$ является равносильным преобразованием.

13. Укажите основные причины возможной потери корней при решении уравнений с одной переменной.

§ 27. Общие методы решения уравнений

В этом параграфе мы поговорим об общих идеях, на которых основано решение уравнений, о наиболее общих методах, используемых при решении уравнений любых видов.

1. Замена уравнения $h(f(x)) = h(g(x))$ уравнением $f(x) = g(x)$

Этот метод мы применяли:

— при решении показательных уравнений, когда переходили от уравнения $a^{f(x)} = a^{g(x)}$ ($a > 0$, $a \neq 1$) к уравнению $f(x) = g(x)$;

— при решении логарифмических уравнений, когда переходили от уравнения $\log_a f(x) = \log_a g(x)$ к уравнению $f(x) = g(x)$;

— при решении иррациональных уравнений, когда переходили от уравнения $\sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{g(x)}$ к уравнению $f(x) = g(x)$.

Этот метод можно применять только в том случае, когда $y = h(x)$ — монотонная функция (которая каждое своё значение принимает по одному разу). Например, $y = x^7$ — возрастающая функция, поэтому от уравнения $(2x + 2)^7 = (5x - 9)^7$ можно перейти к уравнению $2x + 2 = 5x - 9$. Это равносильное преобразование уравнения.

Если $y = h(x)$ — немонотонная функция, то указанный метод применять нельзя, поскольку *возможна потеря корней*. Нельзя, например, заменить уравнение $(2x + 2)^4 = (5x - 9)^4$ уравнением $2x + 2 = 5x - 9$. При этом переходе «потеряется» корень $x = 1$; проверьте: значение $x = 1$ удовлетворяет уравнению $(2x + 2)^4 = (5x - 9)^4$ и не удовлетворяет уравнению $2x + 2 = 5x - 9$. Причина в том, что $y = x^4$ — немонотонная функция, каждое своё положительное значение она принимает в двух точках. По той же причине нельзя переходить от уравнения $\sin 2x = \sin x$ к уравнению $2x = x$ с единственным корнем $x = 0$. На самом деле указанное тригонометрическое уравнение имеет бесконечное множество корней:

$$x = \pi n,\ x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n;\ n \in \mathbf{Z}.$$

2. Метод разложения на множители

Суть этого метода заключается в следующем: уравнение $f(x)g(x)h(x) = 0$ можно заменить совокупностью уравнений:

$$f(x) = 0;\quad g(x) = 0;\quad h(x) = 0.$$

Решив уравнения этой совокупности, нужно взять те их корни, которые принадлежат области определения исходного уравнения, а остальные отбросить как посторонние. Многочисленные примеры применения метода разложения на множители вы видели в 10-м классе при решении тригонометрических уравнений. Приведём ещё два примера.

Пример 1. Решить уравнение

$$\left(\sqrt{x+2}-3\right)\left(2^{x^2+6x+5}-1\right)\ln(x-8)=0.$$

Решение. Задача сводится к решению совокупности трёх уравнений:

$$\sqrt{x+2}=3; \quad 2^{x^2+6x+5}=1; \;\; \ln(x-8)=0.$$

Из первого уравнения находим: $x+2=9$; $x_1=7$.

Из второго уравнения получаем: $x^2+6x+5=0$; $x_2=-1$, $x_3=-5$.

Из третьего уравнения находим: $x-8=1$; $x_4=9$.

Сделаем проверку. ОДЗ исходного уравнения задаётся системой неравенств

$$\begin{cases} x+2\geqslant 0, \\ x-8>0. \end{cases}$$

Из найденных четырёх корней x_1, x_2, x_3, x_4 этой системе неравенств удовлетворяет лишь $x_4=9$. Значит, $x=9$ — единственный корень уравнения, а остальные являются посторонними для данного уравнения.

Ответ: 9.

Пример 2. Решить уравнение $x^3-7x+6=0$.

Решение. Представив слагаемое $7x$ в виде $x+6x$, получим последовательно:

$$x^3-x-6x+6=0;$$
$$x(x^2-1)-6(x-1)=0;$$
$$x(x-1)(x+1)-6(x-1)=0;$$
$$(x-1)(x(x+1)-6)=0;$$
$$(x-1)(x^2+x-6)=0.$$

Теперь задача сводится к решению совокупности уравнений:

$$x-1=0; \quad x^2+x-6=0.$$

Из первого уравнения находим $x_1=1$, из второго — $x_2=2$, $x_3=-3$.

Поскольку все преобразования были равносильными, найденные три значения являются корнями заданного уравнения.

Ответ: 1; 2; -3.

3. Метод введения новой переменной

Этим методом мы с вами часто пользовались при решении уравнений. Суть метода проста: если уравнение $f(x) = 0$ удалось преобразовать к виду $p(g(x)) = 0$, то нужно ввести новую переменную $u = g(x)$, решить уравнение $p(u) = 0$, а затем решить совокупность уравнений:

$$g(x) = u_1; \quad g(x) = u_2; \quad \ldots; \quad g(x) = u_n, \text{ —}$$

где $u_1, u_2, \ldots, u_n$ — корни уравнения $p(u) = 0$.

Умение удачно ввести новую переменную приходит с опытом. Удачный выбор новой переменной делает структуру уравнения более прозрачной. Новая переменная иногда очевидна, иногда несколько завуалирована, но «ощущается», а иногда «проявляется» лишь в процессе преобразований. Примите совет: решая уравнение, не торопитесь начинать преобразования, сначала подумайте, нельзя ли записать уравнение проще, введя новую переменную. И ещё: если вы ввели новую переменную, то решите полученное уравнение относительно новой переменной до конца, т. е. вплоть до проверки корней (если это необходимо), и только потом возвращайтесь к исходной переменной.

Пример 3. Решить уравнение $\dfrac{1}{x^2 + 3x - 3} + \dfrac{2}{x^2 + 3x + 1} = \dfrac{7}{5}$.

Решение. Введём новую переменную $y = x^2 + 3x$. Это позволит переписать уравнение в более простом и приятном виде (что, собственно говоря, и составляет цель введения новой переменной — и запись упрощается, и структура уравнения становится более ясной):

$$\frac{1}{y - 3} + \frac{2}{y + 1} = \frac{7}{5}.$$

Освободившись от знаменателей, получим: $7y^2 - 29y + 4 = 0$; $y_1 = 4$, $y_2 = \frac{1}{7}$. Теперь для найденных корней надо проверить выполнение условия $5(y - 3)(y + 1) \neq 0$. Оба корня этому условию удовлетворяют.

Осталось, возвращаясь к переменной x, решить два уравнения:

$$x^2 + 3x = 4; \quad x^2 + 3x = \frac{1}{7}.$$

Корнями первого уравнения являются числа 1 и -4, корнями второго — числа $\dfrac{-21 \pm \sqrt{469}}{14}$.

Ответ: 1; -4; $\dfrac{-21 \pm \sqrt{469}}{14}$.

Пример 4. Решить уравнение $\frac{3^{x+1}+1}{7}=\frac{4}{3^{x-2}}$.

Решение. Так как $3^{x+1}=3\cdot 3^x$, а $3^{x-2}=3^x:3^2$, то заданное уравнение можно переписать в виде $\frac{3\cdot 3^x+1}{7}=\frac{4\cdot 9}{3^x}$. Введём новую переменную $u=3^x$; получим:

$$\frac{3u+1}{7}=\frac{36}{u};$$

$$3u^2+u=252;$$

$$3u^2+u-252=0;$$

$$u_1=9,\quad u_2=-\frac{28}{3}.$$

Возвращаясь к исходной переменной, получаем совокупность уравнений:

$$3^x=9;\quad 3^x=-\frac{28}{3}.$$

Из первого уравнения находим $x=2$, второе уравнение не имеет корней.

Ответ: 2.

Пример 5. Решить уравнение $\cos 2x-5\sin x-3=0$.

Решение. Есть смысл ввести новую переменную $u=\sin x$, понимая, что от $\cos 2x$ «добраться» до $\sin x$ сравнительно несложно:

$$\cos 2x=\cos^2 x-\sin^2 x=(1-\sin^2 x)-\sin^2 x=1-2u^2.$$

Подставим в заданное тригонометрическое уравнение u вместо $\sin x$ и $1-2u^2$ вместо $\cos 2x$:

$$(1-2u^2)-5u-3=0;$$

$$2u^2+5u+2=0;$$

$$u_1=-\frac{1}{2},\ u_2=-2.$$

Возвращаясь к исходной переменной, получаем совокупность уравнений:

$$\sin x=-\frac{1}{2};\ \ \sin x=-2.$$

Из первого уравнения находим: $x=(-1)^{n+1}\frac{\pi}{6}+\pi n$; второе уравнение не имеет корней.

Ответ: $(-1)^{n+1}\frac{\pi}{6}+\pi n,\ n\in \mathbf{Z}$.

Пример 6. Решить уравнение $\lg^2 x^3 + \log_{0,1} 10x - 7 = 0$.

Решение. Здесь новая переменная как бы «ощущается»: $u = \lg x$. Подготовимся к её введению, для чего используем свойства логарифмов:

$$\lg^2 x^3 = (\lg x^3)^2 = (3\lg x)^2 = 9\lg^2 x;$$

$$\log_{0,1} 10x = \log_{(0,1)^{-1}}(10x)^{-1} = -\log_{10} 10x = -(\lg 10 + \lg x) =$$
$$= -(1 + \lg x).$$

Перепишем заданное уравнение в виде $9\lg^2 x - (1 + \lg x) - 7 = 0$ и введём новую переменную $u = \lg x$:

$$9u^2 - (1 + u) - 7 = 0;$$
$$9u^2 - u - 8 = 0;$$
$$u_1 = 1,\ u_2 = -\frac{8}{9}.$$

Возвращаясь к исходной переменной, получаем совокупность уравнений:

$$\lg x = 1; \quad \lg x = -\frac{8}{9}.$$

Из первого уравнения находим $x_1 = 10$, из второго — $x_2 = 10^{-\frac{8}{9}}$.

Ответ: 10; $10^{-\frac{8}{9}}$.

Мы рассмотрели различные уравнения: рациональное, показательное, тригонометрическое и логарифмическое. Как видите, тип уравнения не так уж важен, идея решения по сути одна и та же.

В заключение рассмотрим более сложный пример, где новая переменная «проявляется» только в процессе преобразований.

Пример 7. Решить уравнение $x^2 + \dfrac{81x^2}{(9 + x)^2} = 40$.

Решение. Заметив, что левая часть уравнения имеет структуру $A^2 + B^2$, где $A = x$, $B = \dfrac{9x}{9 + x}$, выделим в левой части полный квадрат, прибавив и отняв $2AB$, т. е. $2x \cdot \dfrac{9x}{9 + x}$. Получим последовательно:

$$\left(x^2 + \frac{81x^2}{(9 + x)^2} - 2x \cdot \frac{9x}{9 + x}\right) + 2x \cdot \frac{9x}{9 + x} = 40;$$

$$\left(x - \frac{9x}{9 + x}\right)^2 + \frac{18x^2}{9 + x} = 40;$$

$$\left(\frac{x^2}{9 + x}\right)^2 + \frac{18x^2}{9 + x} - 40 = 0.$$

Новая переменная «проявилась»: $u = \frac{x^2}{9+x}$. Относительно этой новой переменной мы получили квадратное уравнение $u^2 + 18u - 40 = 0$. Находим его корни: $u_1 = 2$, $u_2 = -20$.

Возвращаясь к исходной переменной, получаем совокупность уравнений:

$$\frac{x^2}{9+x} = 2; \quad \frac{x^2}{9+x} = -20.$$

Из первого уравнения находим: $x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{19}$; второе уравнение не имеет действительных корней.

Ответ: $1 \pm \sqrt{19}$.

4. Функционально-графический метод

Идея графического метода решения уравнения $f(x) = g(x)$ проста и понятна: нужно построить графики функций $y = f(x)$, $y = g(x)$ и найти точки их пересечения. Корнями уравнения служат абсциссы этих точек. Графическим методом вы не раз пользовались, начиная с курса алгебры 7-го класса. Этот метод позволяет определить число корней уравнения, угадать значение корня, найти приближённые, а иногда и точные значения корней.

В некоторых случаях построение графиков функций можно заменить ссылкой на какие-либо свойства функций (потому-то мы говорим не о графическом, а о *функционально-графическом методе* решения уравнений). Если, например, одна из функций $y = f(x)$, $y = g(x)$ возрастает, а другая — убывает, то уравнение $f(x) = g(x)$ либо не имеет корней, либо имеет один корень (который иногда можно угадать). Этим приёмом мы уже не раз пользовались.

Упомянем ещё одну довольно красивую разновидность функционально-графического метода: *если на множестве X наибольшее значение одной из функций $y = f(x)$, $y = g(x)$ равно A и наименьшее значение другой функции тоже равно A, то уравнение $f(x) = g(x)$ равносильно на множестве X системе уравнений*

$$\begin{cases} f(x) = A, \\ g(x) = A. \end{cases}$$

Пример 8. Решить уравнение $\sqrt{x} = |x - 2|$.

Решение. Графики функций

$$y = \sqrt{x} \text{ и } y = |x - 2|$$

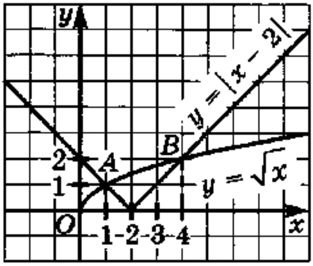


Рис. 134

изображены на рис. 134. Они пересекаются в точках $A(1;\ 1)$ и $B(4;\ 2)$. Значит, уравнение имеет два корня: $x_1 = 1$, $x_2 = 4$.

Ответ: 1; 4.

Пример 9. Решить уравнение

$$x^5 + 5x - 42 = 0.$$

Решение. Заметим, что $x = 2$ — корень уравнения. Докажем, что это единственный корень.

Преобразуем уравнение к виду $x^5 = 42 - 5x$. Функция $y = x^5$ возрастает, а функция $y = 42 - 5x$ убывает. Значит, уравнение имеет только один корень.

Ответ: 2.

Пример 10. Решить уравнение $3^x + 4^x = 5^x$.

Решение. Замечаем, что $x = 2$ — корень уравнения. Докажем, что это единственный корень.

Разделив обе части уравнения на 4^x, преобразуем уравнение к виду $\left(\frac{3}{4}\right)^x + 1 = \left(\frac{5}{4}\right)^x$. Функция $y = \left(\frac{3}{4}\right)^x + 1$ убывает, а функция $y = \left(\frac{5}{4}\right)^x$ возрастает. Значит, уравнение имеет только один корень.

Ответ: 2.

Пример 11. Решить уравнение $\cos 2\pi x = x^2 - 2x + 2$.

Решение. Рассмотрим функцию $y = x^2 - 2x + 2$. Её графиком служит парабола, ветви которой направлены вверх. Значит, в вершине параболы функция достигает своего наименьшего значения. Абсциссу вершины параболы найдём из уравнения $y' = 0$. Имеем:

$$y' = (x^2 - 2x + 2)' = 2x - 2;$$
$$2x - 2 = 0;$$
$$x = 1;$$
$$y(1) = 1^2 - 2 \cdot 1 + 2 = 1.$$

Итак, для функции $y = x^2 - 2x + 2$ получили $y_{\text{наим}} = 1$. В то же время функция $y = \cos 2\pi x$ обладает свойством: $y_{\text{наиб}} = 1$. Значит, задача сводится к решению системы уравнений

$$\begin{cases} \cos 2\pi x = 1, \\ x^2 - 2x + 2 = 1. \end{cases}$$

Из второго уравнения системы получаем: $x = 1$. Поскольку это значение удовлетворяет и первому уравнению системы, оно является единственным решением системы и, следовательно, единственным корнем заданного уравнения.

Ответ: 1.

Вопросы для самопроверки

1. Укажите основные методы решения уравнений с одной переменной.

2. В чём состоит метод разложения на множители при решении уравнений с одной переменной?

3. Опишите суть метода введения новой переменной при решении уравнения с одной переменной.

4. Как можно использовать графики функций для решения уравнения с одной переменной?

5. Как можно использовать свойства функций для решения уравнения с одной переменной?

§ 28. Равносильность неравенств

Напомним, что **решением неравенства** $f(x) > g(x)$ называют всякое значение переменной x, которое обращает заданное неравенство с переменной в верное числовое неравенство. Иногда используют термин *частное решение*. Множество всех частных решений неравенства называют **общим решением** или просто **решением неравенства**. Таким образом, термин *решение* используют в трёх смыслах: как общее решение, как частное решение и как процесс, но обычно по смыслу бывает ясно, о чём идёт речь.

Определение 1. Два неравенства с одной переменной $f(x) > g(x)$ и $p(x) > h(x)$ называют **равносильными**, если их решения (т. е. множества частных решений) совпадают.

Вы, конечно, понимаете, что использование в определении знака > непринципиально. Можно и в этом определении, и во всех утверждениях, имеющихся в данном параграфе, использовать любой другой знак неравенства — как строгого, так и нестрогого.

Определение 2. Если общее решение неравенства

$$f(x) > g(x) \tag{1}$$

содержится в общем решении неравенства

$$p(x) > h(x), \tag{2}$$

то неравенство (2) называют **следствием неравенства (1)**.

Рис. 135

Например, неравенство $x^2 > 9$ является следствием неравенства $2x > 6$. В самом деле, преобразовав первое неравенство к виду $x^2 - 9 > 0$ и далее к виду $(x - 3)(x + 3) > 0$ и применив метод интервалов (рис. 135), получаем, что решением неравенства служит объединение двух открытых лучей: $(-\infty; -3) \cup (3; +\infty)$. Решение второго неравенства $2x > 6$ имеет вид $x > 3$, т. е. представляет собой открытый луч $(3; +\infty)$. Решение второго неравенства является частью решения первого неравенства, а потому первое неравенство — следствие второго.

Интересно, что ситуация изменится радикальным образом, если в обоих неравенствах изменить знак неравенства: неравенство $2x < 6$ будет следствием неравенства $x^2 < 9$. В самом деле, решением первого неравенства служит открытый луч $(-\infty; 3)$. Решением второго неравенства служит интервал $(-3; 3)$. Решение второго неравенства является частью решения первого неравенства, а потому первое неравенство — следствие второго.

При решении уравнений мы не очень опасались того, что в результате некоторых преобразований можем получить уравнение-следствие, поскольку посторонние корни мы всегда могли отсеять с помощью проверки. В неравенствах, где решение чаще всего представляет собой бесконечное множество чисел, доводить дело до проверки нецелесообразно. Поэтому в неравенствах стараются выполнять только равносильные преобразования.

Решение неравенств в школьном курсе алгебры основано на шести теоремах о равносильности, в определённом смысле аналогичных соответствующим теоремам о равносильности уравнений (см. § 26).

Теорема 1. ***Если какой-либо член неравенства перенести из одной части неравенства в другую с противоположным знаком, оставив знак неравенства без изменения, то получится неравенство, равносильное данному.***

Теорема 2. ***Если обе части неравенства возвести в одну и ту же нечётную степень, оставив знак неравенства без изменения, то получится неравенство, равносильное данному.***

Теорема 3. ***Показательное неравенство $a^{f(x)} > a^{g(x)}$ равносильно:***

а) ***неравенству того же смысла $f(x) > g(x)$, если $a > 1$;***

б) ***неравенству противоположного смысла $f(x) < g(x)$, если $0 < a < 1$.***

Теорема 4. а) ***Если обе части неравенства $f(x) > g(x)$ умножить на одно и то же выражение $h(x)$, положительное при***

всех x из области определения (области допустимых значений переменной) неравенства $f(x) > g(x)$, оставив при этом знак неравенства без изменения, то получится неравенство $f(x)h(x) > g(x)h(x)$, равносильное данному.

б) ***Если обе части неравенства $f(x) > g(x)$ умножить на одно и то же выражение $h(x)$, отрицательное при всех x из области определения неравенства $f(x) > g(x)$, изменив при этом знак неравенства на противоположный ($>$ на $<$), то получится неравенство $f(x)h(x) < g(x)h(x)$, равносильное данному.***

Теорема 5. ***Если обе части неравенства $f(x) > g(x)$ неотрицательны в области его определения (в ОДЗ), то после возведения обеих частей неравенства в одну и ту же чётную степень n получится неравенство того же смысла $(f(x))^n > (g(x))^n$, равносильное данному в его ОДЗ.***

Теорема 6. ***Пусть X — решение системы неравенств*** $\begin{cases} f(x) > 0, \\ g(x) > 0. \end{cases}$

Тогда логарифмическое неравенство $\log_a f(x) > \log_a g(x)$ равносильно на множестве X:

а) ***неравенству того же смысла $f(x) > g(x)$, если $a > 1$;***

б) ***неравенству противоположного смысла $f(x) < g(x)$, если $0 < a < 1$.***

Теоремами 1 и 4 вы активно пользовались в курсе алгебры 9-го класса, когда решали рациональные неравенства и их системы. Теорему 3 мы использовали выше, в § 13, для решения показательных неравенств. Теорему 6 мы использовали в § 18 для решения логарифмических неравенств.

Докажем для примера теорему 4, а). Пусть дано неравенство

$$f(x) > g(x); \tag{3}$$

умножим обе его части на выражение $h(x)$, положительное при всех x из ОДЗ неравенства (3), и рассмотрим неравенство

$$f(x)h(x) > g(x)h(x). \tag{4}$$

Докажем, что неравенства (3) и (4) равносильны.

Пусть $x = a$ — решение неравенства (3) (имеется в виду *частное решение*). Тогда $f(a) > g(a)$ — верное числовое неравенство. По условию выражение $h(x)$ положительно при всех x из ОДЗ неравенства (3); это означает, в частности, что $h(a) > 0$. Если обе части числового неравенства $f(a) > g(a)$ умножить на положительное число $h(a)$, то знак неравенства следует сохранить; получим $f(a)h(a) > g(a)h(a)$ — верное неравенство, а потому $x = a$ — решение неравенства (4).

Пусть теперь $x = a$ — решение неравенства (4). Тогда $f(a)h(a) > g(a)h(a)$ — верное числовое неравенство. Но $h(a) > 0$, значит, если обе части числового неравенства $f(a)h(a) > g(a)h(a)$ разделить на $h(a)$, то знак неравенства следует сохранить; получим $f(a) > g(a)$ — верное неравенство, а потому $x = a$ — решение неравенства (3).

Итак, каждое частное решение неравенства (3) является в то же время частным решением неравенства (4) и, обратно, каждое частное решение неравенства (4) является в то же время частным решением неравенства (3). Это значит, что множества частных решений, т. е. решения обоих неравенств, совпадают. Следовательно, неравенства (3) и (4) равносильны.

Решая различные неравенства, мы постоянно убеждались в том, что в конечном счёте всё сводится к решению рациональных неравенств. А рациональные неравенства удобно решать методом интервалов. Напомним суть этого метода, причём для иллюстрации возьмём пример, несколько более сложный по сравнению с теми, которые встречались до сих пор.

Пример 1. Решить неравенство $\dfrac{x^2(3x+4)^3(x-2)^4}{(x-5)^5(2x-7)^6} \geqslant 0.$

Решение. Отметим на числовой прямой корни числителя — точки 0, $-\dfrac{4}{3}$, 2 — и корни знаменателя — точки 5 и 3,5 (рис. 136). Учтём, что выражение

$$f(x) = \frac{x^2(3x+4)^3(x-2)^4}{(x-5)^5(2x-7)^6}$$

принимает положительные значения при $x > 5$, а далее по промежуткам знаки $f(x)$ меняются так, как показано на рис. 136 (обратите внимание, что слева и справа от точек 0, 2 и 3,5 знаки одинаковы, а слева и справа от точек $-\dfrac{4}{3}$ и 5 — различны; это связано с чётностью или нечётностью соответствующих показателей). Выделим промежутки, на которых $f(x) > 0$, а также точки, в которых $f(x)$ обращается в 0 (корни числителя). Полученная геометрическая иллюстрация решения заданного неравенства позволяет составить аналитическую запись:

$$x \leqslant -\frac{4}{3};\ x = 0;\ x = 2;\ x > 5.$$ ■

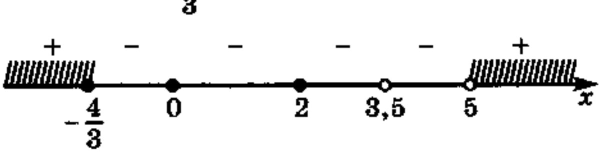


Рис. 136

Определение 3. Говорят, что несколько неравенств с одной переменной образуют **систему неравенств**, если ставится задача найти все *одинаковые частные решения* заданных неравенств. Значение переменной, при котором каждое из неравенств системы обращается в верное числовое неравенство, называют **частным решением системы неравенств**. Множество всех частных решений системы неравенств называют **решением системы неравенств**.

Решение *системы неравенств* представляет собой *пересечение* решений неравенств, образующих систему.

Определение 4. Говорят, что несколько неравенств с одной переменной образуют **совокупность неравенств**, если ставится задача найти все такие значения переменной, каждое из которых является частным решением *хотя бы одного* из заданных неравенств. Каждое такое значение переменной называют **частным решением совокупности неравенств**. Множество всех частных решений совокупности неравенств называют **решением совокупности неравенств**.

Решение *совокупности неравенств* представляет собой *объединение решений* неравенств, образующих совокупность.

Неравенства, образующие *систему*, объединяются *фигурной скобкой*, а неравенства, образующие *совокупность*, — *квадратной скобкой*. Впрочем, для неравенств, образующих совокупность, вполне допустима запись в строчку через точку с запятой. Например, решение неравенства $\sin^2 x > \frac{1}{4}$ сводится к решению совокупности неравенств $\sin x > \frac{1}{2}$; $\sin x < -\frac{1}{2}$.

Пример 2. Решить систему и совокупность неравенств:

а) $\begin{cases} 2x - 1 > 3, \\ 3x - 2 \geqslant 11; \end{cases}$ б) $\left[\begin{array}{l} 2x - 1 > 3, \\ 3x - 2 \geqslant 11. \end{array}\right.$

Решение. а) Решая первое неравенство системы, получаем: $x > 2$. Решая второе неравенство системы, получаем: $x \geqslant \frac{13}{3}$. Отметим эти промежутки на одной координатной прямой, использовав для первого промежутка верхнюю штриховку, а для второго — нижнюю (рис. 137). Решением системы неравенств будет пересечение решений неравенств системы. В рассматриваемом примере получаем луч $\left[\frac{13}{3}; +\infty\right)$.

Рис. 137

б) Решением совокупности неравенств будет объединение решений неравенств совокупности. В рассматриваемом примере получаем (см. рис. 137) открытый луч $(2; +\infty)$ — промежуток, на котором имеется хотя бы одна штриховка.

Ответ: а) $x \geqslant \frac{13}{3}$; б) $x > 2$.

Если в системе из нескольких неравенств одно является следствием другого (или других), то неравенство-следствие можно отбросить. Мы этим уже фактически пользовались. Рассмотрим ещё раз логарифмическое неравенство из § 18.

Пример 3. Решить неравенство $\log_{\frac{1}{2}}(16 + 4x - x^2) \leqslant -4$.

Решение. Представим число -4 в виде логарифма по основанию $\frac{1}{2}$: $-4 = \log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^{-4} = \log_{\frac{1}{2}} 16$. Это позволит переписать заданное неравенство так:

$$\log_{\frac{1}{2}}(16 + 4x - x^2) \leqslant \log_{\frac{1}{2}} 16.$$

Учитывая, что здесь основанием логарифмов служит число, которое меньше 1, составляем, пользуясь теоремой 6, систему неравенств, равносильную заданному логарифмическому неравенству:

$$\begin{cases} 16 + 4x - x^2 > 0, \\ 16 + 4x - x^2 \geqslant 16. \end{cases}$$

Если выполняется второе неравенство системы, то автоматически выполняется и первое неравенство (если $A \geqslant 16$, то тем более $A > 0$). Значит, первое неравенство — следствие второго и его можно отбросить. Решая второе неравенство, находим:

$$x^2 - 4x \leqslant 0;$$
$$x(x - 4) \leqslant 0;$$
$$0 \leqslant x \leqslant 4.$$

Ответ: $0 \leqslant x \leqslant 4$.

Снова вернёмся к § 18. Мы говорили, что при решении логарифмических неравенств переходят от неравенства

$$\log_a f(x) > \log_a g(x) \tag{5}$$

при $a > 1$ к равносильной системе неравенств

$$\begin{cases} f(x) > 0, \\ g(x) > 0, \\ f(x) > g(x), \end{cases} \tag{6}$$

а при $0 < a < 1$ к равносильной системе неравенств

$$\begin{cases} f(x) > 0, \\ g(x) > 0, \\ f(x) < g(x). \end{cases} \qquad (7)$$

Первые два неравенства каждой из этих систем определяют ОДЗ неравенства (5), а знак последнего неравенства каждой из систем либо совпадает со знаком неравенства (5) — в случае, когда $a > 1$, — либо противоположен знаку неравенства (5) — в случае, когда $0 < a < 1$.

А теперь обратим внимание на одно обстоятельство, которое мы в общем виде не обсуждали в § 18. В каждой из составленных систем есть по одному «лишнему» неравенству. В системе (6) имеем: $f(x) > g(x)$, $g(x) > 0$; отсюда по свойству транзитивности неравенств можно сделать вывод, что $f(x) > 0$. Это значит, что первое неравенство системы (6) является следствием второго и третьего неравенств, а неравенство-следствие можно отбросить. Таким образом, систему (6) можно заменить более простой системой неравенств

$$\begin{cases} g(x) > 0, \\ f(x) > g(x). \end{cases}$$

Аналогично можно установить, что систему (7) можно заменить более простой системой неравенств

$$\begin{cases} f(x) > 0, \\ f(x) < g(x). \end{cases}$$

В примере 3 нам встретился типичный случай, когда решение заданного неравенства сводится к решению системы неравенств. Бывают и более сложные неравенства, сводящиеся к модели «совокупность систем неравенств». Это значит, что надо найти решения всех составленных систем неравенств, а затем эти решения объединить.

Пример 4. Решить неравенство

$$\log_{x-2}(2x - 3) > \log_{x-2}(24 - 6x).$$

Решение. Рассмотрим два случая:

1) $x - 2 > 1$; 2) $0 < x - 2 < 1$.

В первом случае, записав условия, определяющие ОДЗ: $2x - 3 > 0$ и $24 - 6x > 0$, — мы можем «освободиться» от знаков логарифмов, сохранив согласно теореме 6 знак исходного неравенства: $2x - 3 > 24 - 6x$.

Во втором случае, записав условия, определяющие ОДЗ: $2x - 3 > 0$ и $24 - 6x > 0$, — мы можем «освободиться» от знаков логарифмов, изменив согласно теореме 6 знак исходного неравенства: $2x - 3 < 24 - 6x$.

Это значит, что заданное логарифмическое неравенство равносильно совокупности двух систем неравенств:

$$\begin{cases} x - 2 > 1, \\ 2x - 3 > 0, \\ 24 - 6x > 0, \\ 2x - 3 > 24 - 6x; \end{cases} \qquad \begin{cases} 0 < x - 2 < 1, \\ 2x - 3 > 0, \\ 24 - 6x > 0, \\ 2x - 3 < 24 - 6x. \end{cases}$$

Из первой системы неравенств находим: $\frac{27}{8} < x < 4$, из второй — $2 < x < 3$.

Ответ: $2 < x < 3$; $3\frac{3}{8} < x < 4$.

Пример 5. Решить совокупность систем неравенств:

$$\begin{cases} x^5 - 6x^4 + 12x^3 - 8x^2 > 0, \\ \frac{1}{x} \geqslant \frac{1}{7}, \\ \frac{2x - 9}{2x^2 + 3x + 4} \geqslant 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2 > 9, \\ x^2 \geqslant 8, \\ \frac{3x + 3}{x + 4} \leqslant 2. \end{cases}$$

Решение. Первый этап. Решим первую систему.

1) Решим первое неравенство первой системы:

$$x^5 - 6x^4 + 12x^3 - 8x^2 > 0;$$
$$x^2(x^3 - 6x^2 + 12x - 8) > 0;$$
$$x^2(x - 2)^3 > 0.$$

Отметим на числовой прямой точки 0 и 2 (рис. 138). Учтём, что выражение $f(x) = x^2(x - 2)^3$ принимает положительные значения при $x > 2$, а далее по промежуткам знаки $f(x)$ меняются так, как показано на рис. 138. Выделим промежуток, на котором $f(x) > 0$, — открытый луч $(2; +\infty)$.

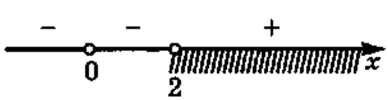


Рис. 138

Рис. 139

2) Решим второе неравенство:

$$\frac{1}{x} \geqslant \frac{1}{7},\ \frac{1}{x} - \frac{1}{7} \geqslant 0,\ \frac{7 - x}{7x} \geqslant 0,\ \frac{x - 7}{x} \leqslant 0.$$

Воспользовавшись для решения последнего неравенства методом интервалов, получим полуинтервал $(0; 7]$ (рис. 139).

3) Решим неравенство $\frac{2x - 9}{2x^2 + 3x + 4} \geqslant 0$. Заметим, что квадратный трёхчлен $2x^2 + 3x + 4$ имеет отрицательный дискриминант и положительный старший коэффициент, значит, этот трёхчлен положителен при всех значениях x, а потому неравенство можно преобразовать к более простому виду $2x - 9 \geqslant 0$, откуда находим $x \geqslant 4{,}5$, т. е. луч $[4{,}5; +\infty)$.

4) Изобразим найденные решения трёх неравенств на одной числовой прямой и найдём их *пересечение* (рис. 140). Получим решение первой системы неравенств — отрезок $[4{,}5; 7]$.

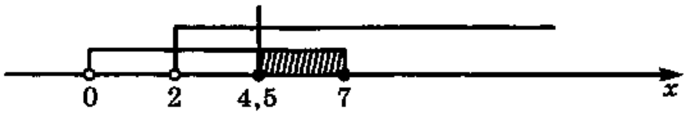


Рис. 140

Второй этап. Решим вторую систему. Сразу заметим, что если $x^2 > 9$, то тем более $x^2 \geqslant 8$, так что второе неравенство системы не содержит дополнительной информации о решении системы, оно является следствием первого неравенства и его можно без ущерба отбросить.

1) Решим первое неравенство второй системы:

$$x^2 > 9,\ x^2 - 9 > 0,\ (x - 3)(x + 3) > 0.$$

Воспользовавшись для решения последнего неравенства методом интервалов, получим: $x < -3$; $x > 3$ (рис. 141).

2) Решим третье неравенство второй системы:

$$\frac{3x + 3}{x + 4} \leqslant 2,\ \frac{3x + 3}{x + 4} - 2 \leqslant 0,\ \frac{3x + 3 - 2x - 8}{x + 4} \leqslant 0,\ \frac{x - 5}{x + 4} \leqslant 0.$$

Воспользовавшись для решения последнего неравенства методом интервалов, получим: $-4 < x \leqslant 5$ (рис. 142).

Рис. 141

Рис. 142

3) Изобразим найденные решения двух неравенств на одной числовой прямой и найдём их *пересечение* (рис. 143). Получим решение второй системы неравенств: $(-4; -3) \cup (3; 5]$.

Третий этап. Чтобы найти решение *совокупности систем*, нужно найденные решения систем изобразить на одной числовой прямой и

Рис. 143

найти их *объединение*. Получим интервал $(-4; -3)$ и полуинтервал $(3; 7]$ (рис. 144).

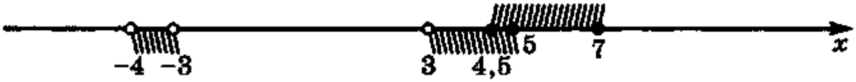


Рис. 144

Ответ: $-4 < x < -3$; $3 < x \leqslant 7$.

Вопросы для самопроверки

1. Даны два неравенства: $f(x) > g(x)$ и $p(x) < h(x)$. В каком случае их называют равносильными?

2. Известно, что оба неравенства $f(x) > g(x)$ и $p(x) < h(x)$ не имеют решений. Можно ли назвать их равносильными?

3. Даны два неравенства: $f(x) > g(x)$ и $p(x) < h(x)$. В каком случае неравенство $f(x) > g(x)$ является следствием неравенства $p(x) < h(x)$?

4. Даны два неравенства: $f(x) > g(x)$ и $p(x) < h(x)$. Известно, что каждое из них является следствием другого. Можно ли назвать эти неравенства равносильными?

5. Что называют областью определения (областью допустимых значений переменной — ОДЗ) неравенства $f(x) > g(x)$?

6. Какие вы знаете равносильные преобразования неравенства с одной переменной?

7. Какие вы знаете неравносильные преобразования неравенства с одной переменной?

8. Что называют системой неравенств с одной переменной? Что называют частным решением системы неравенств? Что называют общим решением (или просто решением) системы неравенств?

9. Что называют совокупностью неравенств с одной переменной? Что называют частным решением совокупности неравенств? Что называют общим решением (или просто решением) совокупности неравенств?

10. Пусть множество A — решение неравенства $f(x) > g(x)$, а множество B — решение неравенства $p(x) < h(x)$. Как выразить через A и B решение системы неравенств $\begin{cases} f(x) > g(x), \\ p(x) < h(x)? \end{cases}$

11. Пусть множество A — решение неравенства $f(x) > g(x)$, а множество B — решение неравенства $p(x) < h(x)$. Как выразить через A и B решение совокупности неравенств $\left[\begin{array}{l} f(x) > g(x), \\ p(x) < h(x)? \end{array}\right.$

§ 29. Уравнения и неравенства с модулями

В курсе алгебры основной школы вам встречались простейшие уравнения и неравенства с модулями. Для их решения мы применяли геометрический метод, основанный на том, что $|x - a|$ — это расстояние на числовой прямой между точками x и a: $|x - a| = \rho(x; a)$. Например, для решения уравнения $|x - 3| = 2$ нужно найти на числовой прямой точки, удалённые от точки 3 на расстояние 2. Таких точек две: $x_1 = 1$ и $x_2 = 5$ (рис. 145). Решая неравенство $|2x + 7| < 9$, сначала преобразуем его к виду $|x + 3{,}5| < 4{,}5$, а далее рассуждаем так: нужно найти на числовой прямой точки x, которые удалены от точки $-3{,}5$ на расстояние, меньшее 4,5; все такие точки заполняют интервал $(-8; 1)$ (рис. 146).

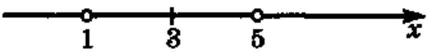


Рис. 145

Рис. 146

Но основной способ решения уравнений и неравенств с модулями связан с так называемым «раскрытием модуля по определению»: если $a \geqslant 0$, то $|a| = a$; если $a < 0$, то $|a| = -a$. Как правило, уравнение (неравенство) с модулями сводится к совокупности уравнений (неравенств), не содержащих знак модуля.

Кроме указанного определения, используются следующие утверждения:

1) *Если $c > 0$, то уравнение $|f(x)| = c$ равносильно совокупности уравнений $f(x) = c$; $f(x) = -c$.*

2) *Если $c > 0$, то неравенство $|f(x)| < c$ равносильно двойному неравенству $-c < f(x) < c$.*

3) *Если $c \geqslant 0$, то неравенство $|f(x)| > c$ равносильно совокупности неравенств $f(x) < -c$; $f(x) > c$.*

4) *Если обе части неравенства $f(x) < g(x)$ принимают только неотрицательные значения, то оно равносильно неравенству $(f(x))^2 < (g(x))^2$.*

Пример 1. Решить уравнение $x^2 + 2|x - 1| - 6 = 0$.

Решение. Если $x - 1 \geqslant 0$, то $|x - 1| = x - 1$ и заданное уравнение принимает вид

$$x^2 + 2(x - 1) - 6 = 0, \text{ т. е. } x^2 + 2x - 8 = 0.$$

Если же $x - 1 < 0$, то $|x - 1| = -(x - 1)$ и заданное уравнение принимает вид

$$x^2 - 2(x - 1) - 6 = 0, \text{ т. е. } x^2 - 2x - 4 = 0.$$

Таким образом, заданное уравнение следует рассмотреть по отдельности в каждом из двух указанных случаев.

1) Пусть $x - 1 \geqslant 0$, т. е. $x \geqslant 1$. Из уравнения $x^2 + 2x - 8 = 0$ находим $x_1 = 2$, $x_2 = -4$. Условию $x \geqslant 1$ удовлетворяет лишь значение $x_1 = 2$.

2) Пусть $x - 1 < 0$, т. е. $x < 1$. Из уравнения $x^2 - 2x - 4 = 0$ находим $x_3 = 1 + \sqrt{5}$, $x_4 = 1 - \sqrt{5}$. Условию $x < 1$ удовлетворяет лишь значение $x_4 = 1 - \sqrt{5}$.

Ответ: 2; $1 - \sqrt{5}$.

Пример 2. Решить уравнение $|x^2 - 6x + 7| = \frac{5x - 9}{3}$.

Решение. Первый способ (*раскрытие модуля по определению*). Рассуждая, как в примере 1, приходим к выводу, что заданное уравнение нужно рассмотреть по отдельности при выполнении двух условий: $x^2 - 6x + 7 \geqslant 0$ или $x^2 - 6x + 7 < 0$.

1) Если $x^2 - 6x + 7 \geqslant 0$, то $|x^2 - 6x + 7| = x^2 - 6x + 7$ и заданное уравнение принимает вид $x^2 - 6x + 7 = \frac{5x - 9}{3}$, т. е. $3x^2 - 23x + 30 = 0$. Решив это квадратное уравнение, получим: $x_1 = 6$, $x_2 = \frac{5}{3}$.

Выясним, удовлетворяет ли значение $x_1 = 6$ условию $x^2 - 6x + 7 \geqslant 0$. Для этого подставим указанное значение в квадратное неравенство. Получим: $6^2 - 6 \cdot 6 + 7 \geqslant 0$, т. е. $7 \geqslant 0$ — верное неравенство. Значит, $x_1 = 6$ — корень заданного уравнения.

Выясним, удовлетворяет ли значение $x_2 = \frac{5}{3}$ условию $x^2 - 6x + 7 \geqslant 0$. Для этого подставим указанное значение в квадратное неравенство. Получим: $\left(\frac{5}{3}\right)^2 - \frac{5}{3} \cdot 6 + 7 \geqslant 0$, т. е. $\frac{25}{9} - 3 \geqslant 0$ — неверное неравенство. Значит, $x_2 = \frac{5}{3}$ не является корнем заданного уравнения.

2) Если $x^2 - 6x + 7 < 0$, то $|x^2 - 6x + 7| = -(x^2 - 6x + 7)$ и заданное уравнение принимает вид $-(x^2 - 6x + 7) = \frac{5x - 9}{3}$, т. е. $3x^2 - 13x + 12 = 0$. Решив это квадратное уравнение, получим: $x_3 = 3$, $x_4 = \frac{4}{3}$.

Значение $x_3 = 3$ удовлетворяет условию $x^2 - 6x + 7 < 0$. Значит, $x_3 = 3$ — корень заданного уравнения.

Значение $x_4 = \frac{4}{3}$ не удовлетворяет условию $x^2 - 6x + 7 < 0$. Значит, $x_4 = \frac{4}{3}$ не является корнем заданного уравнения.

Итак, заданное уравнение имеет два корня: $x = 6$, $x = 3$.

Второй способ. Если дано уравнение $|f(x)| = h(x)$, то при $h(x) < 0$ оно не имеет решений, а при $h(x) \geqslant 0$ надо рассмотреть два случая: $f(x) = h(x)$; $f(x) = -h(x)$ (совокупность уравнений). Для заданного уравнения потребуем выполнения условия $\frac{5x - 9}{3} \geqslant 0$ и рассмотрим совокупность уравнений:

$$x^2 - 6x + 7 = \frac{5x - 9}{3};\ x^2 - 6x + 7 = -\frac{5x - 9}{3}.$$

Оба эти уравнения решены выше (при первом способе решения заданного уравнения), их корни таковы: 6, $\frac{5}{3}$, 3, $\frac{4}{3}$. Условию $\frac{5x - 9}{3} \geqslant 0$ из этих четырёх значений удовлетворяют лишь два: 6 и 3. Значит, заданное уравнение имеет два корня: $x = 6$, $x = 3$.

Третий способ (*графический*).

1) Построим график функции $y = |x^2 - 6x + 7|$. Сначала построим параболу $y = x^2 - 6x + 7$. Имеем $x^2 - 6x + 7 = (x - 3)^2 - 2$. График функции $y = (x - 3)^2 - 2$ можно получить из графика функции $y = x^2$ сдвигом его на 3 единицы масштаба вправо (по оси x) и на 2 единицы масштаба вниз (по оси y). Прямая $x = 3$ — ось интересующей нас параболы. В качестве контрольных точек для более точного построения графика удобно взять точку $(3; -2)$ — вершину параболы, точку $(0; 7)$ и симметричную ей относительно оси параболы точку $(6; 7)$. Парабола изображена на рис. 147.

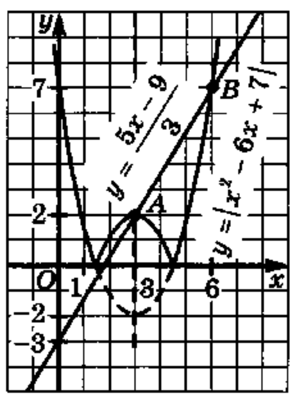


Рис. 147

Чтобы построить теперь график функции $y = |x^2 - 6x + 7|$, нужно оставить без изменения те части построенной параболы, которые лежат не ниже оси x, а ту часть параболы, которая лежит ниже оси x, отобразить симметрично относительно оси x. График изображён на рис. 147.

2) Построим график линейной функции $y = \frac{5x - 9}{3}$. В качестве контрольных точек

удобно взять точки (0; −3) и (3; 2). Прямая, служащая графиком указанной линейной функции, изображена на том же рис. 147.

Существенно то, что точка $x = 1{,}8$ пересечения прямой с осью абсцисс располагается правее левой точки пересечения параболы с осью абсцисс — это точка $x = 3 - \sqrt{2}$ (поскольку $3 - \sqrt{2} < 1{,}8$).

3) Судя по чертежу, графики пересекаются в двух точках — $A(3;\ 2)$ и $B(6;\ 7)$. Подставив абсциссы этих точек $x = 3$ и $x = 6$ в заданное уравнение, убеждаемся, что и при том и при другом значении получается верное числовое равенство. Значит, наша гипотеза подтвердилась — уравнение имеет два корня: $x = 3$ и $x = 6$.

Ответ: 3; 6.

Замечание. Вы, конечно, понимаете, что графический способ при всём своём изяществе не очень надёжен. В рассмотренном примере он сработал только потому, что корни уравнения — целые числа. Тем не менее в пользе этого метода мы с вами не раз убеждались.

Пример 3. Решить уравнение $|2x - 4| + |x + 3| = 8$.

Решение. Первый способ. Выражение $2x - 4$ обращается в 0 в точке $x = 2$, а выражение $x + 3$ — в точке $x = -3$. Эти две точки разбивают числовую прямую на три промежутка: $x < -3$, $-3 \leqslant x < 2$, $x \geqslant 2$ (рис. 148).

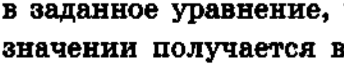


Рис. 148

Рассмотрим первый промежуток — $(-\infty; -3)$. Если $x < -3$, то $2x - 4 < 0$ и $x + 3 < 0$. Значит, $|2x - 4| = -(2x - 4)$, а $|x + 3| = -(x + 3)$. Таким образом, на рассматриваемом промежутке заданное уравнение принимает вид $-(2x - 4) - (x + 3) = 8$. Решив это уравнение, находим: $x = -\frac{7}{3}$. Это значение не удовлетворяет условию $x < -3$ и поэтому не является корнем заданного уравнения.

Рассмотрим второй промежуток — $[-3; 2)$. Если $-3 \leqslant x < 2$, то $2x - 4 < 0$, а $x + 3 \geqslant 0$. Значит, $|2x - 4| = -(2x - 4)$, а $|x + 3| = (x + 3)$. Таким образом, на рассматриваемом промежутке заданное уравнение принимает вид $-(2x - 4) + (x + 3) = 8$. Решив это уравнение, находим: $x = -1$. Это значение принадлежит рассматриваемому промежутку, а потому является корнем заданного уравнения.

Рассмотрим третий промежуток — $[2; +\infty)$. Если $x \geqslant 2$, то $2x - 4 \geqslant 0$ и $x + 3 > 0$. Значит, $|2x - 4| = (2x - 4)$, $|x + 3| = (x + 3)$. Таким образом, на рассматриваемом промежутке заданное уравнение принимает вид $(2x - 4) + (x + 3) = 8$. Решив это уравнение, находим: $x = 3$. Это значение принадлежит рассматриваемому промежутку, а потому является корнем заданного уравнения.

Итак, $x_1 = -1$, $x_2 = 3$.

Второй способ. Преобразуем уравнение к виду $2|x - 2| + |x + 3| = 8$. Переведём эту аналитическую модель на геометрический язык: нам нужно найти на координатной прямой такие точки $M(x)$, которые удовлетворяют условию $2\rho(x; 2) + \rho(x; -3) = 8$ или

$$MA + 2MB = 8 \qquad (1)$$

(рис. 149; здесь $A = A(-3)$, $B = B(2)$).

Интересующая нас точка M не может находиться левее точки A, поскольку в этом случае $2MB > 10$ и, следовательно, равенство (1) выполняться не может.

Рассмотрим случай, когда точка $M_1(x)$ лежит между A и B (см. рис. 149). Для такой точки равенство (1) принимает вид

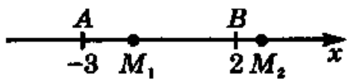


Рис. 149

$$(x - (-3)) + 2(2 - x) = 8,$$

откуда находим: $x = -1$.

Рассмотрим случай, когда точка $M_2(x)$ лежит правее точки B (см. рис. 149). Для такой точки равенство (1) принимает вид

$$(x - (-3)) + 2(x - 2) = 8,$$

откуда находим: $x = 3$.

Ответ: -1; 3.

Пусть теперь требуется решить неравенство $|f(x)| < g(x)$. Освободиться от знака модуля можно тремя способами.

Первый способ. Если $f(x) \geqslant 0$, то $|f(x)| = f(x)$ и заданное неравенство принимает вид $f(x) < g(x)$. Если $f(x) < 0$, то $|f(x)| = -f(x)$ и заданное неравенство принимает вид $-f(x) < g(x)$. Таким образом, задача сводится к решению совокупности двух систем неравенств:

$$\begin{cases} f(x) \geqslant 0, \\ f(x) < g(x); \end{cases} \quad \begin{cases} f(x) < 0, \\ -f(x) < g(x). \end{cases}$$

Второй способ. Перепишем заданное неравенство в виде $g(x) > |f(x)|$. Отсюда сразу следует, что $g(x) > 0$. Воспользуемся тем, что при $g(x) > 0$ неравенство $|f(x)| < g(x)$ равносильно двойному неравенству $-g(x) < f(x) < g(x)$. Это позволит свести неравенство $|f(x)| < g(x)$ к системе неравенств

$$\begin{cases} g(x) > 0, \\ -g(x) < f(x) < g(x), \end{cases}$$

или, подробнее, к системе неравенств

$$\begin{cases} g(x) > 0, \\ f(x) < g(x), \\ f(x) > -g(x). \end{cases}$$

Третий способ. Воспользуемся тем, что при $g(x) > 0$ обе части неравенства $|f(x)| < g(x)$ неотрицательны, а потому их возведение в квадрат есть равносильное преобразование неравенства. Учтём, кроме того, что $|a|^2 = a^2$. Это позволит свести неравенство $|f(x)| < g(x)$ к системе неравенств

$$\begin{cases} g(x) > 0, \\ (f(x))^2 < (g(x))^2. \end{cases}$$

Пример 4. Решить неравенство $|x^2 - 3x + 2| < 2x - x^2$.

Решение. Первый способ. Заданное неравенство сводится к совокупности двух систем неравенств:

$$\begin{cases} x^2 - 3x + 2 \geqslant 0, \\ x^2 - 3x + 2 < 2x - x^2; \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 - 3x + 2 < 0, \\ -(x^2 - 3x + 2) < 2x - x^2. \end{cases}$$

Решая первую систему, получаем:

$$\begin{cases} (x - 1)(x - 2) \geqslant 0, \\ 2(x - 2)(x - 0,5) < 0, \end{cases}$$

откуда находим: $0,5 < x \leqslant 1$ (рис. 150).

Решая вторую систему, получаем:

$$\begin{cases} (x - 1)(x - 2) < 0, \\ x < 2, \end{cases}$$

откуда находим: $1 < x < 2$ (рис. 151).

Рис. 150

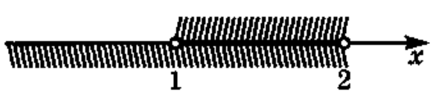


Рис. 151

Объединив найденные решения систем неравенств, получим: $0,5 < x < 2$.

Второй способ. Заданное неравенство сводится к системе неравенств

$$\begin{cases} 2x - x^2 > 0, \\ x^2 - 3x + 2 < 2x - x^2, \\ x^2 - 3x + 2 > -(2x - x^2). \end{cases}$$

Решая эту систему, получаем:

$$\begin{cases} x(x - 2) < 0, \\ 2(x - 2)(x - 0,5) < 0, \\ x < 2, \end{cases}$$

откуда находим: $0,5 < x < 2$ (рис. 152).

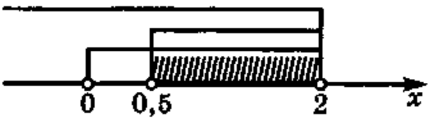


Рис. 152

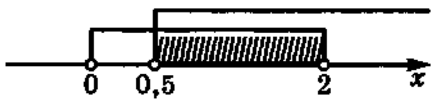


Рис. 153

Третий способ. Заданное неравенство сводится к системе неравенств

$$\begin{cases} 2x - x^2 > 0, \\ (x^2 - 3x + 2)^2 < (2x - x^2)^2. \end{cases}$$

Решая эту систему, получаем:

$$\begin{cases} x(x - 2) < 0, \\ (x^2 - 3x + 2)^2 - (2x - x^2)^2 < 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x(x - 2) < 0, \\ ((x^2 - 3x + 2) - (2x - x^2))((x^2 - 3x + 2) + (2x - x^2)) < 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 < x < 2, \\ (2x^2 - 5x + 2)(x - 2) > 0; \end{cases} \quad \begin{cases} 0 < x < 2, \\ (2x - 1)(x - 2)^2 > 0; \end{cases} \quad \begin{cases} 0 < x < 2, \\ x > 0,5. \end{cases}$$

Из последней системы находим: $0,5 < x < 2$ (рис. 153).

Ответ: $0,5 < x < 2$.

Пусть теперь требуется решить неравенство $|f(x)| > g(x)$. Освободиться от знака модуля можно тремя способами.

Первый способ. Если $f(x) \geqslant 0$, то $|f(x)| = f(x)$ и заданное неравенство принимает вид $f(x) > g(x)$. Если $f(x) < 0$, то $|f(x)| = -f(x)$ и заданное неравенство принимает вид $-f(x) > g(x)$. Таким образом, задача сводится к решению совокупности двух систем неравенств:

$$\begin{cases} f(x) \geqslant 0, \\ f(x) > g(x); \end{cases} \quad \begin{cases} f(x) < 0, \\ -f(x) > g(x). \end{cases}$$

Второй способ. Рассмотрим два случая: $g(x) \geqslant 0$, $g(x) < 0$. Если $g(x) < 0$, то неравенство $|f(x)| > g(x)$ выполняется для всех x из области определения выражения $f(x)$. Если $g(x) \geqslant 0$, то воспользуемся тем, что согласно утверждению 3) на с. 251 неравенство $|f(x)| > g(x)$ равносильно совокупности неравенств $f(x) < -g(x)$; $f(x) > g(x)$. Таким образом, заданное неравенство сводится к совокупности трёх систем:

$$\begin{cases} g(x) < 0, \\ x \in D(f); \end{cases} \quad \begin{cases} g(x) \geqslant 0, \\ f(x) < -g(x); \end{cases} \quad \begin{cases} g(x) \geqslant 0, \\ f(x) > g(x). \end{cases}$$

Третий способ. Воспользуемся тем, что при $g(x) \geqslant 0$ неравенство $|f(x)| > g(x)$ равносильно неравенству $(|f(x)|)^2 > (g(x))^2$. Это позволит свести неравенство $|f(x)| > g(x)$ к совокупности систем:

$$\begin{cases} g(x) < 0, \\ x \in D(f); \end{cases} \quad \begin{cases} g(x) \geqslant 0, \\ (f(x))^2 > (g(x))^2. \end{cases}$$

Пример 5. Решить неравенство $|x^2 - 3x + 2| \geqslant 2x - x^2$.

Решение. Первый способ. Задача сводится к решению совокупности двух систем неравенств:

$$\begin{cases} x^2 - 3x + 2 \geqslant 0, \\ x^2 - 3x + 2 \geqslant 2x - x^2; \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 - 3x + 2 < 0, \\ -(x^2 - 3x + 2) \geqslant 2x - x^2. \end{cases}$$

Решив первую систему, получим: $x \leqslant 0{,}5$, $x \geqslant 2$. Вторая система не имеет решений.

Второй способ. Если $2x - x^2 \leqslant 0$, то заданное неравенство выполняется (его левая часть неотрицательна, а правая — неположительна). Если $2x - x^2 > 0$, то заданное неравенство равносильно совокупности двух неравенств: $x^2 - 3x + 2 \geqslant 2x - x^2$; $x^2 - 3x + 2 \leqslant -(2x - x^2)$. Таким образом, получаем совокупность неравенства и двух систем неравенств:

$$2x - x^2 \leqslant 0; \quad \begin{cases} 2x - x^2 > 0, \\ x^2 - 3x + 2 \geqslant 2x - x^2; \end{cases} \quad \begin{cases} 2x - x^2 > 0, \\ x^2 - 3x + 2 \leqslant -(2x - x^2). \end{cases}$$

Решив неравенство $2x - x^2 \leqslant 0$, получим: $x \leqslant 0$, $x \geqslant 2$. Решив первую систему, получим: $0 < x \leqslant 0{,}5$. Вторая система не имеет решений.

В итоге получаем: $x \leqslant 0{,}5$, $x \geqslant 2$.

Третий способ. Если $2x - x^2 \leqslant 0$, то заданное неравенство выполняется. Если $2x - x^2 > 0$, то обе части заданного неравенства можно возвести в квадрат. Таким образом, получаем совокупность неравенства и системы неравенств:

$$2x - x^2 \leqslant 0; \quad \begin{cases} 2x - x^2 > 0, \\ (x^2 - 3x + 2)^2 \geqslant (2x - x^2)^2. \end{cases}$$

Решив неравенство $2x - x^2 \leqslant 0$, получим: $x \leqslant 0$, $x \geqslant 2$.
Решая систему, получаем последовательно:

$$\begin{cases} x(x - 2) < 0, \\ (x^2 - 3x + 2)^2 - (2x - x^2)^2 \geqslant 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 < x < 2, \\ ((x^2 - 3x + 2) - (2x - x^2))((x^2 - 3x + 2) + (2x - x^2)) \geqslant 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 < x < 2, \\ (2x^2 - 5x + 2)(x - 2) \leqslant 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 < x < 2, \\ 2(x - 0{,}5)(x - 2)^2 \leqslant 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 < x < 2, \\ x \leqslant 0{,}5, \ x = 2; \end{cases}$$

$$0 < x \leqslant 0{,}5.$$

Объединив это решение с найденными выше решениями $x \leqslant 0$, $x \geqslant 2$, получаем: $x \leqslant 0{,}5$, $x \geqslant 2$.

Ответ: $x \leqslant 0{,}5$; $x \geqslant 2$.

Пример 6. Решить неравенство $|x - 2| + |x + 4| < 10$.

Решение. Первый способ. Выражение $x - 2$ обращается в нуль в точке 2, а выражение $x + 4$ обращается в нуль в точке -4. Указанные две точки разбивают числовую прямую на три промежутка: $x < -4$; $-4 \leqslant x < 2$; $x \geqslant 2$.

На промежутке $x < -4$ выражение $x - 2$ принимает отрицательные значения, равно как и выражение $x + 4$. Значит, на указанном промежутке выполняются соотношения:

$$|x - 2| = -(x - 2); \ |x + 4| = -(x + 4).$$

Поэтому заданное неравенство принимает вид

$$-(x-2)-(x+4)<10.$$

На промежутке $-4 \leqslant x < 2$ выражение $x-2$ принимает отрицательные значения, а выражение $x+4$ — неотрицательные. Значит, на указанном промежутке выполняются соотношения:

$$|x-2|=-(x-2);\ |x+4|=x+4.$$

Поэтому заданное неравенство принимает вид

$$-(x-2)+(x+4)<10.$$

Наконец, на промежутке $x \geqslant 2$ выражение $x-2$ принимает неотрицательные значения, равно как и выражение $x+4$. Значит, на указанном промежутке выполняются соотношения:

$$|x-2|=x-2;\ |x+4|=x+4,$$

а потому заданное неравенство принимает вид $(x-2)+(x+4)<10$.

В итоге получаем совокупность трёх систем неравенств:

$$\begin{cases} x<-4, \\ -(x-2)-(x+4)<10; \end{cases} \quad \begin{cases} -4 \leqslant x < 2, \\ -(x-2)+(x+4)<10; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geqslant 2, \\ (x-2)+(x+4)<10. \end{cases}$$

Из первой системы получаем: $-6 < x < -4$, из второй — $-4 \leqslant x < 2$, из третьей — $2 \leqslant x < 4$. Объединив найденные решения, получаем: $-6 < x < 4$.

Второй способ. Переведём аналитическую модель $|x-2| + |x+4| < 10$ на геометрический язык: нам нужно найти на координатной прямой такие точки x, которые удовлетворяют условию $\rho(x;\ 2)+\rho(x;\ -4)<10$, т. е. сумма расстояний каждой из таких точек от точек 2 и -4 меньше 10. Это точки, заключённые в интервале от -6 до 4 (рис. 154).

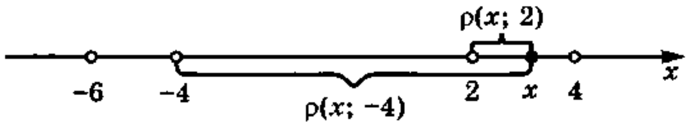


Рис. 154

Ответ: $-6 < x < 4$.

Вопросы для самопроверки

1. Опишите способы решения уравнения $|f(x)| = g(x)$.

2. Опишите способы решения неравенства $|f(x)| < g(x)$.

3. Опишите способы решения неравенства $|f(x)| > g(x)$.

§ 30. Иррациональные уравнения и неравенства

1. Иррациональные уравнения

Иррациональными называют уравнения, в которых переменная содержится под знаком радикала или под знаком возведения в дробную степень. Для таких уравнений ищут, как правило, только действительные корни.

Основной метод решения иррациональных уравнений — метод возведения обеих частей уравнения в одну и ту же степень. При этом следует иметь в виду, что возведение обеих частей уравнения в одну и ту же нечётную степень есть равносильное преобразование уравнения (см. теорему 2 из § 26), а в чётную — неравносильное (см. теорему 4 из § 26). Значит, основные принципиальные трудности связаны с возведением обеих частей уравнения в одну и ту же чётную степень, когда из-за неравносильности преобразования могут появиться посторонние корни, а потому обязательна проверка всех найденных корней. О различных способах проверки корней мы говорили в § 26 (см. пример 1 и пункт 3).

Пример 1. Решить уравнения: а) $\sqrt[6]{x^2 - 5x} = \sqrt[6]{2x - 6}$;
б) $\sqrt[4]{x^4 - 4x^3 + 5x^2 + 6} = x - 1$; в) $\sqrt[3]{x^2 + 2x} = x$;
г) $(x^2 + 2x)^{\frac{1}{3}} = x$.

Решение. а) Возведя обе части уравнения в шестую степень, получим:

$$x^2 - 5x = 2x - 6;$$
$$x^2 - 7x + 6 = 0;$$
$$x_1 = 1,\ x_2 = 6.$$

Проверка. «Хорошие» корни можно проверить непосредственной подстановкой в исходное уравнение. При $x = 1$ заданное уравнение принимает вид $\sqrt[6]{-4} = \sqrt[6]{-4}$, во множестве действительных чисел такое «равенство» не имеет смысла. Значит, 1 — посторонний корень, он появился по причине расширения ОДЗ уравнения после возведения в шестую степень. При $x = 6$ заданное уравнение принимает вид $\sqrt[6]{6} = \sqrt[6]{6}$ — это верное равенство.

Итак, уравнение имеет единственный корень: $x = 6$.

б) Возведя обе части уравнения в четвёртую степень, получим:

$$x^4 - 4x^3 + 5x^2 + 6 = (x - 1)^4. \qquad (1)$$

Воспользуемся формулой бинома Ньютона, известной вам из курса алгебры и начал математического анализа 10-го класса:

$$(x + a)^4 = x^4 + C_4^1x^3a + C_4^2x^2a^2 + C_4^3xa^3 + a^4,$$

где, напомним, $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n - k)!}$.

Из неё следует, что $(x-1)^4 = x^4 - C_4^1x^3 + C_4^2x^2 - C_4^3x + 1$, т. е. что

$$(x-1)^4 = x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1.$$

Воспользовавшись последним равенством, вернёмся к уравнению (1):

$$x^4 - 4x^3 + 5x^2 + 6 = x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1;$$
$$x^2 - 4x - 5 = 0;$$
$$x_1 = 5,\ x_2 = -1.$$

Проверка. Здесь не очень хочется делать проверку подстановкой, поскольку придётся оперировать с достаточно громоздкими выражениями. Поступим по-другому. Заметим, что по смыслу уравнения должно выполняться неравенство $x \geqslant 1$. Поэтому $x = 5$ — корень уравнения, а $x = -1$ — посторонний корень.

в) Возведя обе части уравнения в третью степень, получим:

$$x^2 + 2x = x^3;$$
$$x(x^2 - x - 2) = 0;$$
$$x_1 = 0,\ x_2 = 2,\ x_3 = -1.$$

Поскольку возведение обеих частей уравнения в третью степень — равносильное преобразование уравнения, проверка не нужна. Найденные три значения — корни уравнения.

г) Это уравнение «почти» такое же, что было в пункте в). Но (внимание!) под знаком возведения в дробную степень *по определению* (см. § 8) может содержаться только неотрицательное число. Из найденных выше трёх значений ($x_1 = 0$, $x_2 = 2$, $x_3 = -1$) лишь первое и второе удовлетворяют указанному условию. Значит, уравнение имеет два корня: 0 и 2, тогда как $x = -1$ — посторонний корень.

В чём причина появления постороннего корня? При переходе от уравнения $(x^2 + 2x)^{\frac{1}{3}} = x$ к уравнению $x^2 + 2x = x^3$ произошло *расширение области определения*: в первом уравнении область определения задаётся неравенством $x^2 + 2x \geqslant 0$, а во втором уравнении область определения — вся числовая прямая.

Ответ: а) 6; б) 5; в) 0, 2, −1; г) 0, 2.

При решении иррациональных уравнений применяются как общие методы решения уравнения, о которых мы говорили выше, в § 27, так и некоторые специфические приёмы.

Пример 2. Решить уравнение

$$\sqrt{x^2 - x + 2} + \sqrt{x^2 - x + 7} = \sqrt{2x^2 - 2x + 21}.$$

Решение. Введя новую переменную $u = x^2 - x$, получим существенно более простое иррациональное уравнение

$$\sqrt{u + 2} + \sqrt{u + 7} = \sqrt{2u + 21}.$$

Возведём обе части уравнения в квадрат:

$$\left(\sqrt{u+2}+\sqrt{u+7}\right)^2=\left(\sqrt{2u+21}\right)^2.$$

Далее последовательно получаем:

$$u+2\ +2\sqrt{u+2}\ \sqrt{u+7}+u+7=2u+21;$$

$$\sqrt{(u+2)(u+7)}=6;$$

$$u^2+9u+14=36;$$

$$u^2+9u-22=0;$$

$$u_1=2,\ u_2=-11.$$

Проверка найденных значений их подстановкой в уравнение $\sqrt{u+2}\ +\ \sqrt{u+7}\ =\ \sqrt{2u+21}$ показывает, что $u_1=2$ — корень уравнения, а $u_2=-11$ — посторонний корень.

Возвращаясь к исходной переменной x, получаем уравнение $x^2-x=2$, т. е. квадратное уравнение $x^2-x-2=0$, решив которое находим два корня: $x_1=2$, $x_2=-1$.

Ответ: 2; –1.

Пример 3. Решить уравнение

$$x^2+3-\sqrt{2x^2-3x+2}=1{,}5(x+4). \qquad (2)$$

Решение. Уединение корня и возведение обеих частей уравнения (2) в квадрат привело бы к громоздкому уравнению. В то же время, если проявить некоторую наблюдательность, можно заметить, что уравнение (2) легко сводится к квадратному. Действительно, умножим обе его части на 2:

$$2x^2+6-2\sqrt{2x^2-3x+2}=3x+12;$$

$$2x^2-3x+2-2\sqrt{2x^2-3x+2}\ -8=0.$$

Введя новую переменную $y=\sqrt{2x^2-3x+2}$, получим: y^2-2y- $-8=0$, откуда $y_1=4$, $y_2=-2$. Значит, уравнение (2) равносильно следующей совокупности уравнений:

$$\sqrt{2x^2-3x+2}=4;\ \sqrt{2x^2-3x+2}=-2.$$

Из первого уравнения этой совокупности находим: $x_1=3{,}5$, $x_2=-2$. Второе уравнение корней не имеет.

Проверка. Так как совокупность уравнений равносильна уравнению (2), причём второе уравнение этой совокупности корней не имеет, то найденные корни можно проверить подстановкой в уравнение $\sqrt{2x^2-3x+2}=4$. Эта подстановка показывает, что оба найденных значения x являются корнями этого уравнения, а значит, и заданного уравнения (2).

Ответ: 3,5; −2.

Пример 4. Решить уравнение

$$2x - 5 + 2\sqrt{x^2 - 5x} + 2\sqrt{x - 5} + 2\sqrt{x} = 48. \qquad (3)$$

Решение. Областью определения уравнения (3) является луч $[5; \infty)$. В этой области выражение $\sqrt{x^2 - 5x}$ можно представить следующим образом: $\sqrt{x^2 - 5x} = \sqrt{x}\sqrt{x - 5}$. Теперь уравнение (3) можно переписать так:

$$x + x - 5 + 2\sqrt{x}\sqrt{x - 5} + 2\sqrt{x - 5} + 2\sqrt{x} - 48 = 0;$$

$$\left(\sqrt{x}\right)^2 + 2\sqrt{x}\sqrt{x - 5} + \left(\sqrt{x - 5}\right)^2 + 2\left(\sqrt{x - 5} + \sqrt{x}\right) - 48 = 0;$$

$$\left(\sqrt{x - 5} + \sqrt{x}\right)^2 + 2\left(\sqrt{x - 5} + \sqrt{x}\right) - 48 = 0.$$

Введя новую переменную $y = \sqrt{x - 5} + \sqrt{x}$, получим квадратное уравнение $y^2 + 2y - 48 = 0$, из которого находим: $y_1 = 6$, $y_2 = -8$. Таким образом, задача свелась к решению совокупности уравнений:

$$\sqrt{x - 5} + \sqrt{x} = 6; \ \sqrt{x - 5} + \sqrt{x} = -8.$$

Из первого уравнения совокупности находим $x = \left(\frac{41}{12}\right)^2$, второе уравнение совокупности решений явно не имеет.

Проверка. Нетрудно проверить (подстановкой), что $x = \left(\frac{41}{12}\right)^2$ является корнем уравнения $\sqrt{x - 5} + \sqrt{x} = 6$. Но это уравнение равносильно уравнению (3), значит, $x = \left(\frac{41}{12}\right)^2$ является корнем и уравнения (3).

Ответ: $\left(\frac{41}{12}\right)^2$.

Иногда при решении иррациональных уравнений оказывается удобным ввести две новые переменные.

Пример 5. Решить уравнение

$$\sqrt[4]{1 - x} + \sqrt[4]{15 + x} = 2. \qquad (4)$$

Решение. Введём новые переменные: $\begin{cases} u = \sqrt[4]{1-x}, \\ v = \sqrt[4]{15+x}. \end{cases}$ (5)

Тогда уравнение (4) примет вид $u + v = 2$. Но для нахождения значений двух новых переменных одного уравнения недостаточно. Возведя в четвёртую степень обе части каждого из уравнений системы (5), получим:

$$\begin{cases} u^4 = 1 - x, \\ v^4 = 15 + x. \end{cases}$$

Сложим уравнения последней системы: $u^4 + v^4 = 16$. Таким образом, для нахождения u, v мы имеем следующую симметрическую систему уравнений:

$$\begin{cases} u + v = 2, \\ v^4 + v^4 = 16. \end{cases}$$

Решив её (см. § 2), находим:

$$\begin{cases} u_1 = 0, \\ v_1 = 2; \end{cases} \quad \begin{cases} u_2 = 2, \\ v_2 = 0. \end{cases}$$

Таким образом, уравнение (4) свелось к следующей совокупности систем уравнений:

$$\begin{cases} \sqrt[4]{1-x} = 0, \\ \sqrt[4]{15+x} = 2; \end{cases} \quad \begin{cases} \sqrt[4]{1-x} = 2, \\ \sqrt[4]{15+x} = 0. \end{cases}$$

Решив эту совокупность, находим: $x_1 = 1$, $x_2 = -15$.

Проверка. Проще всего проверить найденные корни непосредственной подстановкой в заданное уравнение. Проделав это, убеждаемся, что оба значения являются корнями уравнения (4).

Ответ: 1; -15.

Пример 6. Решить уравнение

$$\sqrt[3]{2x+1} + \sqrt[3]{6x+1} = \sqrt[3]{2x-1}. \tag{6}$$

Решение. Возведём обе части уравнения (6) в куб:

$$2x + 1 + 3\sqrt[3]{(2x+1)^2} \cdot \sqrt[3]{6x+1} +$$

$$+ 3\sqrt[3]{2x+1} \cdot \sqrt[3]{(6x+1)^2} + 6x + 1 = 2x - 1;$$

$$3\sqrt[3]{2x+1} \cdot \sqrt[3]{6x+1} \cdot \left(\sqrt[3]{2x+1} + \sqrt[3]{6x+1}\right) = -6x - 3.$$

Воспользовавшись уравнением (6), заменим сумму $\sqrt[3]{2x+1} + \sqrt[3]{6x+1}$ выражением $\sqrt[3]{2x-1}$:

$$3\sqrt[3]{2x+1} \cdot \sqrt[3]{6x+1} \cdot \sqrt[3]{2x-1} = -6x - 3;$$

$$\sqrt[3]{(2x+1)(6x+1)(2x-1)} = -2x - 1. \qquad (7)$$

Возведём обе части уравнения (7) в куб:

$$(2x+1)(6x+1)(2x-1) = -(2x+1)^3;$$
$$(2x+1)((6x+1)(2x-1) + (2x+1)^2) = 0;$$
$$16x^2(2x+1) = 0;$$
$$x_1 = -0{,}5,\ x_2 = 0.$$

Проверка. Подстановкой найденных значений x в заданное уравнение (6) убеждаемся, что его корнем является только $x = -0{,}5$.

Ответ: $-0{,}5$.

Замечание. При возведении обеих частей уравнения (6) в куб мы получили уравнение, равносильное уравнению (6). Однако дальнейшая замена выражения $\sqrt[3]{2x+1} + \sqrt[3]{6x+1}$ на выражение $\sqrt[3]{2x-1}$ могла привести (и, как показала проверка, привела) к появлению постороннего корня.

Пример 7. Решить уравнение

$$\sqrt{2x^2+3x+5} + \sqrt{2x^2-3x+5} = 3x. \qquad (8)$$

Решение. Умножим обе части заданного уравнения на выражение

$$\varphi(x) = \sqrt{2x^2+3x+5} - \sqrt{2x^2-3x+5},$$

сопряжённое выражению $\sqrt{2x^2+3x+5} + \sqrt{2x^2-3x+5}$. Так как

$$\left(\sqrt{2x^2+3x+5} + \sqrt{2x^2-3x+5}\right) \cdot \left(\sqrt{2x^2+3x+5} - \sqrt{2x^2-3x+5}\right) =$$
$$= (2x^2+3x+5) - (2x^2-3x+5) = 6x,$$

то уравнение (8) примет вид

$$6x = 3x\left(\sqrt{2x^2+3x+5} - \sqrt{2x^2-3x+5}\right),$$

т. е.

$$x\left(\sqrt{2x^2+3x+5} - \sqrt{2x^2-3x+5} - 2\right) = 0. \qquad (9)$$

Замечаем, что $x_1 = 0$ — один из корней уравнения (9).
Остаётся решить уравнение

$$\sqrt{2x^2+3x+5} - \sqrt{2x^2-3x+5} = 2. \qquad (10)$$

Сложив уравнения (8) и (10), придём к уравнению-следствию

$$2\sqrt{2x^2+3x+5} = 3x + 2. \qquad (11)$$

Решая его методом возведения в квадрат, получим:

$$8x^2 + 12x + 20 = 9x^2 + 12x + 4$$

и далее

$$x^2 = 16,$$

откуда $x_2 = 4$, $x_3 = -4$.

Проверка. Поочерёдно подставляя найденные значения $x_1 = 0$, $x_2 = 4$, $x_3 = -4$ в заданное уравнение, убеждаемся, что ему удовлетворяет только значение $x_2 = 4$. Таким образом, $x = 4$ — единственный корень заданного уравнения. ■

Пример 8. Решить уравнение

$$\sqrt[4]{x-1} + 2\sqrt[3]{3x+2} = 4 + \sqrt{3-x}.$$

Решение. В данном случае никакой из указанных выше способов к успеху не приводит. Попытаемся методом проб найти какой-нибудь корень уравнения. ОДЗ уравнения определяется системой неравенств

$$\begin{cases} x - 1 \geqslant 0, \\ 3 - x \geqslant 0, \end{cases}$$

откуда получаем $1 \leqslant x \leqslant 3$. Значит, корни следует искать только в этом промежутке. Испытывая целые значения из указанного промежутка, находим, что $x = 2$ — корень заданного уравнения. Если мы теперь докажем, что исходное уравнение не имеет других корней, то тем самым решение уравнения будет закончено.

На отрезке $[1; 3]$ функция $y = \sqrt[4]{x-1} + 2\sqrt[3]{3x+2}$ является возрастающей, в то время как функция $y = 4 + \sqrt{3-x}$ — убывающей. Но в этом случае, если уравнение $f(x) = g(x)$ имеет корень, то только один. Значит, $x = 2$ — единственный корень заданного уравнения. ■

2. Иррациональные неравенства

Рассмотрим иррациональное неравенство вида $\sqrt{f(x)} < g(x)$.

Ясно, что его решения должны удовлетворять условию $f(x) \geqslant 0$ и условию $g(x) > 0$. Осталось лишь заметить, что при одновременном выполнении указанных выше условий обе части заданного иррационального неравенства неотрицательны, а потому их возведение в квадрат представляет собой равносильное преобразование неравенства.

Таким образом, *иррациональное неравенство* $\sqrt{f(x)} < g(x)$ *равносильно системе неравенств*

$$\begin{cases} f(x) \geqslant 0, \\ g(x) > 0, \\ f(x) < (g(x))^2. \end{cases}$$

П р и м е р 9. Решить неравенство $\sqrt{x^2 - x - 12} < x$.

Р е ш е н и е. Данное неравенство равносильно системе неравенств:

$$\begin{cases} x^2 - x - 12 \geqslant 0, \\ x > 0, \\ x^2 - x - 12 < x^2; \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x - 4)(x + 3) \geqslant 0, \\ x > 0, \\ x > -12. \end{cases}$$

Получаем: $x \geqslant 4$ (рис. 155).

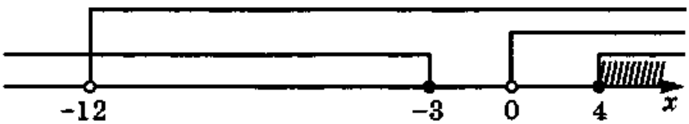


Рис. 155

Ответ: $x \geqslant 4$.

Рассмотрим теперь неравенство вида $\sqrt{f(x)} > g(x)$.

Ясно, во-первых, что его решения должны удовлетворять условию $f(x) \geqslant 0$. Во-вторых, замечаем, что при $g(x) < 0$ (и при отмеченном выше условии $f(x) \geqslant 0$) справедливость неравенства $\sqrt{f(x)} > g(x)$ не вызывает сомнений. В-третьих, замечаем, что если $g(x) \geqslant 0$, то можно возвести в квадрат обе части заданного иррационального неравенства.

Таким образом, *иррациональное неравенство* $\sqrt{f(x)} > g(x)$ *равносильно совокупности систем неравенств*:

$$\begin{cases} f(x) \geqslant 0, \\ g(x) < 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} f(x) \geqslant 0, \\ g(x) \geqslant 0, \\ f(x) > (g(x))^2. \end{cases}$$

Во второй системе первое неравенство является следствием третьего, его можно опустить.

П р и м е р 10. Решить неравенство $\sqrt{x^2 - x - 12} \geqslant x$.

Р е ш е н и е. Данное неравенство равносильно совокупности систем неравенств:

$$\begin{cases} x^2 - x - 12 \geqslant 0, \\ x < 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} x \geqslant 0, \\ x^2 - x - 12 \geqslant x^2. \end{cases}$$

Имеем:

$$\begin{cases}(x-4)(x+3) \geqslant 0, \\ x < 0;\end{cases} \quad \begin{cases}x \geqslant 0, \\ x \leqslant -12.\end{cases}$$

Рис. 156

Из первой системы находим: $x \leqslant -3$ (рис. 156), вторая система не имеет решений.

Ответ: $x \leqslant -3$.

Пример 11. Решить неравенство

$$(x+5)(x-2) + 3\sqrt{x(x+3)} > 0.$$

Решение. Преобразуем неравенство к виду $x^2 + 3x - 10 + 3\sqrt{x^2 + 3x} > 0$ и введём новую переменную $y = \sqrt{x^2 + 3x}$. Тогда последнее неравенство примет вид $y^2 + 3y - 10 > 0$, откуда находим, что либо $y < -5$, либо $y > 2$.

Таким образом, задача сводится к решению совокупности двух неравенств:

$$\sqrt{x^2 + 3x} < -5; \quad \sqrt{x^2 + 3x} > 2.$$

Первое неравенство не имеет решений, а из второго находим:

$$x^2 + 3x > 4;$$
$$(x+4)(x-1) > 0;$$
$$x < -4,\ x > 1.$$

Ответ: $x < -4$; $x > 1$.

Вопросы для самопроверки

1. Опишите способы решения неравенства $\sqrt{f(x)} < g(x)$.

2. Опишите способы решения неравенства $\sqrt{f(x)} > g(x)$.

§ 31. *Доказательство неравенств*

В настоящем параграфе речь идёт о неравенствах, справедливость которых требуется доказать на заданном множестве значений переменных. Если такое множество не указано, то подразумевается, что эти переменные могут принимать любые действительные значения.

1. *Доказательство неравенств с помощью определения*

По определению считается, что $A > B$, если $A - B$ — положительное число. Поэтому для доказательства неравенства $f(a, b, \ldots, k) > g(a, b, \ldots, k)$ на заданном множестве значений $a, b, \ldots, k$ достаточно составить разность $f(a, b, \ldots, k) - g(a, b, \ldots, k)$ и убедиться в том, что она положительна при заданных значениях $a, b, \ldots, k$.

Пример 1. Доказать, что если $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$, то

$$\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab} \text{ (\textit{неравенство Коши}).} \tag{1}$$

Доказательство. Составим разность $\frac{a+b}{2} - \sqrt{ab}$ и выясним её знак. Имеем $\frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} = \frac{a - 2\sqrt{ab} + b}{2} = \frac{\left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right)^2}{2}$. Выражение $\frac{\left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right)^2}{2}$ неотрицательно при любых неотрицательных значениях a и b. Значит, и разность $\frac{a+b}{2} - \sqrt{ab}$ неотрицательна, а это означает, что $\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab}$. Отметим, что знак равенства имеет место лишь при $a = b$. ■

Пример 2. Доказать, что если $ab > 0$, то

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geqslant 2. \tag{2}$$

Доказательство. Имеем:

$$\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) - 2 = \frac{a^2 + b^2 - 2ab}{ab} = \frac{(a-b)^2}{ab}.$$

Так как $ab > 0$, то $\frac{(a-b)^2}{ab} \geqslant 0$, причём знак равенства имеет место лишь при $a = b$. Итак, разность $\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) - 2$ неотрицательна, неравенство (2) доказано. ■

Пример 3. Доказать, что

$$a^2 + 4b^2 + 3c^2 + 14 > 2a + 12b + 6c. \tag{3}$$

Доказательство. Рассмотрим разность

$$(a^2 + 4b^2 + 3c^2 + 14) - (2a + 12b + 6c).$$

Перегруппировав члены этой разности, получим:

$$(a^2 - 2a + 1) + (4b^2 - 12b + 9) + (3c^2 - 6c + 3) + 1 =$$
$$= (a-1)^2 + (2b-3)^2 + 3(c-1)^2 + 1.$$

Последнее выражение положительно при любых значениях a, b, c. Неравенство (3) доказано. ■

Пример 4. Доказать, что если $a + b + c \geqslant 0$, то

$$a^3 + b^3 + c^3 \geqslant 3abc. \qquad (4)$$

Доказательство. Составим разность $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$ и сумму $a^3 + b^3$ дополним до куба суммы:

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 + c^3 - 3a^2b -$$
$$- 3ab^2 - 3abc = (a + b)^3 - 3ab(a + b + c) + c^3.$$

Разложив сумму кубов $(a + b)^3 + c^3$ на множители, получим:

$$(a + b)^3 + c^3 - 3ab(a + b + c) = ((a + b) + c)((a + b)^2 -$$
$$- (a + b)c + c^2) - 3ab(a + b + c) = (a + b + c)(a^2 + 2ab +$$
$$+ b^2 - ac - bc + c^2 - 3ab) = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab -$$
$$- bc - ac) = \frac{1}{2}(a + b + c)(2a^2 + 2b^2 + 2c^2 - 2ab - 2bc - 2ac) =$$
$$= \frac{1}{2}(a + b + c)((a - b)^2 + (a - c)^2 + (b - c)^2).$$

Так как по условию $a + b + c \geqslant 0$, то полученное выражение неотрицательно. Отсюда следует истинность неравенства (4).

Заметим, что знак равенства в неравенстве (4) имеет место в случае, когда $a + b + c = 0$, а также когда $a = b = c$. ■

2. Синтетический метод доказательства неравенств

Суть этого метода заключается в том, что с помощью ряда преобразований доказываемое неравенство выводят из некоторых известных (*опорных*) неравенств. В качестве опорных могут использоваться, например, такие неравенства:

а) $a^2 \geqslant 0$;

б) $\dfrac{a + b}{2} \geqslant \sqrt{ab}$, где $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$ (см. пример 1);

в) $\dfrac{a}{b} + \dfrac{b}{a} \geqslant 2$, где $ab > 0$ (см. пример 2);

г) $|\sin x| \leqslant 1$, $|\cos x| \leqslant 1$;

д) $\sin x < x < \operatorname{tg} x$, где $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$ (рис. 157).

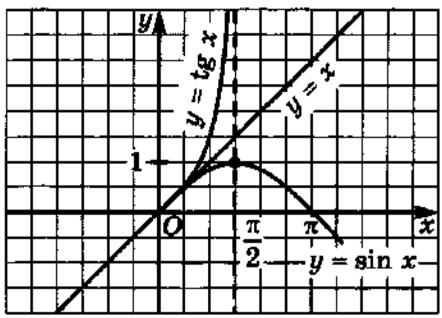


Рис. 157

Пример 5. Доказать неравенство $a \sin^2 \alpha + \dfrac{b}{\sin^2 \alpha} \geqslant 2\sqrt{ab}$, если известно, что $a > 0$, $b > 0$, $\alpha \neq \pi n$.

Доказательство. Воспользуемся неравенством Коши, связывающим среднее арифметическое и среднее геометрическое двух положительных чисел a_1 и a_2: $\dfrac{a_1 + a_2}{2} \geqslant \sqrt{a_1 a_2}$.

Если считать, что $a \sin^2 \alpha = a_1$, $\dfrac{b}{\sin^2 \alpha} = a_2$, то

$$\frac{a \sin^2 \alpha + \dfrac{b}{\sin^2 \alpha}}{2} \geqslant \sqrt{a \sin^2 \alpha \cdot \frac{b}{\sin^2 \alpha}},$$

т. е. $a \sin^2 \alpha + \dfrac{b}{\sin^2 \alpha} \geqslant 2\sqrt{ab}$, что и требовалось доказать. ■

Пример 6. Доказать, что если $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$, $c \geqslant 0$, $d \geqslant 0$, то

$$\frac{a + b + c + d}{4} \geqslant \sqrt[4]{abcd}. \qquad (5)$$

Доказательство. Возьмём в качестве опорного неравенство Коши:

$$\frac{\dfrac{a + b}{2} + \dfrac{c + d}{2}}{2} \geqslant \sqrt{\frac{a + b}{2} \cdot \frac{c + d}{2}}.$$

Так как, в свою очередь, $\dfrac{a + b}{2} \geqslant \sqrt{ab}$ и $\dfrac{c + d}{2} \geqslant \sqrt{cd}$, то

$$\sqrt{\frac{a + b}{2} \cdot \frac{c + d}{2}} \geqslant \sqrt{\sqrt{ab} \cdot \sqrt{cd}} = \sqrt[4]{abcd}.$$

Значит, $\dfrac{\dfrac{a + b}{2} + \dfrac{c + d}{2}}{2} \geqslant \sqrt[4]{abcd}$, т. е. $\dfrac{a + b + c + d}{4} \geqslant \sqrt[4]{abcd}$.

Проанализировав доказательство, приходим к выводу, что знак равенства в неравенстве (5) имеет место тогда и только тогда, когда $a = b$, $c = d$ и $\dfrac{a + b}{2} = \dfrac{c + d}{2}$, т. е. когда $a = b = c = d$. ■

Пример 7. Доказать, что $\left(\frac{n+1}{2}\right)^n > n!$, где $n \in N$, $n > 1$.

Доказательство. Возьмём в качестве опорных следующие неравенства Коши:

$$\frac{n+1}{2} \geqslant \sqrt{n \cdot 1};\ \frac{(n-1)+2}{2} \geqslant \sqrt{(n-1) \cdot 2};$$

$$\frac{(n-2)+3}{2} \geqslant \sqrt{(n-2) \cdot 3};\ \ldots;\ \frac{2+(n-1)}{2} \geqslant \sqrt{2 \cdot (n-1)};$$

$$\frac{1+n}{2} \geqslant \sqrt{1 \cdot n}.$$

Перемножив эти n неравенств, получим:

$$\left(\frac{n+1}{2}\right)^n \geqslant \sqrt{(n(n-1)(n-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1)(1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1)n)} =$$

$$= \sqrt{n!n!} = \sqrt{(n!)^2} = n!.$$

Итак,

$$\left(\frac{n+1}{2}\right)^n \geqslant n!. \qquad (6)$$

Так как по условию $n \neq 1$, то первое и последнее из опорных неравенств Коши могут быть только строгими. Но тогда и после перемножения опорных неравенств полученное неравенство (6) должно быть строгим. Таким образом, $\left(\frac{n+1}{2}\right)^n > n!$, что и требовалось доказать. ■

Пример 8. Доказать, что если $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$, то

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) \geqslant 9. \qquad (7)$$

Доказательство. Первый способ. Возьмём в качестве опорных следующие неравенства:

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{a} \geqslant 2;\ \frac{a}{c}+\frac{c}{a} \geqslant 2;\ \frac{b}{c}+\frac{c}{b} \geqslant 2$$

(эти неравенства становятся равенствами в случаях, когда соответственно $a = b$, $a = c$ и $b = c$). Сложив их, получим:

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+\frac{a}{c}+\frac{c}{a}+\frac{b}{c}+\frac{c}{b} \geqslant 6,$$

или

$$\frac{b+c}{a}+\frac{a+c}{b}+\frac{a+b}{c} \geqslant 6.$$

Далее выполним ряд несложных преобразований:

$$\left(1+\frac{a+c}{b}\right)+\left(1+\frac{b+c}{a}\right)+\left(1+\frac{a+b}{c}\right)\geqslant 9;$$

$$\frac{a+b+c}{b}+\frac{a+b+c}{a}+\frac{a+b+c}{c}\geqslant 9;$$

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\geqslant 9.$$

Знак равенства имеет место лишь в случае, когда $a = b = c$.

Второй способ. Неравенство (7) можно доказать по определению:

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)-9=1+\frac{a}{b}+\frac{a}{c}+\frac{b}{a}+1+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}+\frac{c}{b}+$$

$$+1-9=\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)+\left(\frac{a}{c}+\frac{c}{a}\right)+\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\right)-6=$$

$$=\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}-2\right)+\left(\frac{a}{c}+\frac{c}{a}-2\right)+\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}-2\right)=$$

$$=\frac{(a-b)^2}{ab}+\frac{(a-c)^2}{ac}+\frac{(b-c)^2}{bc}\geqslant 0.$$

Значит, неравенство (7) справедливо. ■

Пример 9. Доказать неравенство

$$\alpha-\frac{\alpha^3}{4}<\sin\alpha, \qquad (8)$$

где $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$.

Доказательство. Выберем в качестве опорного неравенство $\frac{\alpha}{2}<\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$. Последовательно преобразуя его, получим:

$$\alpha\cos\frac{\alpha}{2}<2\sin\frac{\alpha}{2};$$

$$\alpha\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}<2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2};$$

$$\alpha\cos^2\frac{\alpha}{2}<\sin\alpha;$$

$$\alpha\left(1-\sin^2\frac{\alpha}{2}\right)<\sin\alpha. \qquad (9)$$

Воспользуемся ещё одним опорным неравенством:

$$\sin\frac{\alpha}{2}<\frac{\alpha}{2}.$$

Так как по условию $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, то $\sin\frac{\alpha}{2} > 0$ и $\frac{\alpha}{2} > 0$, поэтому неравенство $\sin\frac{\alpha}{2} < \frac{\alpha}{2}$ можно преобразовать и получить в результате следующее неравенство: $\sin^2\frac{\alpha}{2} < \frac{\alpha^2}{4}$, и далее $1 - \sin^2\frac{\alpha}{2} > 1 - \frac{\alpha^2}{4}$, откуда $\alpha\left(1 - \sin^2\frac{\alpha}{2}\right) > \alpha - \frac{\alpha^3}{4}$, т. е.

$$\alpha - \frac{\alpha^3}{4} < \alpha\left(1 - \sin^2\frac{\alpha}{2}\right). \tag{10}$$

Сопоставляя неравенства (9) и (10), получим:

$$\alpha - \frac{\alpha^3}{4} < \alpha\left(1 - \sin^2\frac{\alpha}{2}\right) < \sin\alpha,$$

откуда $\alpha - \frac{\alpha^3}{4} < \sin\alpha$, что и требовалось доказать. ■

3. Доказательство неравенств методом от противного

Пример 10. Доказать, что если $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$, $c \geqslant 0$, $d \geqslant 0$, то

$$\sqrt{(a+c)(b+d)} \geqslant \sqrt{ab} + \sqrt{cd}. \tag{11}$$

Доказательство. Нам надо доказать, что для *любых* неотрицательных значений a, b, c, d выполняется неравенство (11). Предположим противное, что *существует* набор неотрицательных значений a, b, c, d, для которого неравенство (11) неверно, т. е. выполняется неравенство $\sqrt{(a+c)(b+d)} < \sqrt{ab} + \sqrt{cd}$. Так как обе части этого неравенства неотрицательны, то можно возвести их в квадрат: $(a+c)(b+d) < ab + cd + 2\sqrt{abcd}$, откуда $bc + ad < 2\sqrt{abcd}$, т. е. $\frac{bc+ad}{2} < \sqrt{(bc)\cdot(ad)}$.

Но это противоречит неравенству Коши. Значит, наше предположение неверно, а потому справедливо неравенство (11). ■

Пример 11. Доказать, что если $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$, $c \geqslant 0$, то

$$\frac{a+b+c}{3} \leqslant \sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}}. \tag{12}$$

Доказательство. Предположим противное, что существует набор неотрицательных значений a, b, c, для которого неравенство (12) неверно, т. е. выполняется неравенство $\frac{a+b+c}{3} >$ $> \sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}}$. При возведении обеих его частей в квадрат получим:

$$(a+b+c)^2 > 3(a^2+b^2+c^2);$$
$$3(a^2+b^2+c^2) - (a+b+c)^2 < 0;$$
$$3(a^2+b^2+c^2) - (a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc) < 0;$$
$$2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2ac-2bc < 0;$$
$$(a-b)^2+(b-c)^2+(a-c)^2 < 0.$$

Последнее неравенство не является верным, так как сумма квадратов не может быть отрицательным числом. Значит, неверно и наше предположение, а потому справедливо неравенство (12). ■

Замечание. Пусть даны n неотрицательных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Введём в рассмотрение следующие величины:

$H_n = \dfrac{n}{\dfrac{1}{a_1} + \dfrac{1}{a_2} + \ldots + \dfrac{1}{a_n}}$ — *среднее гармоническое*;

$G_n = \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n}$ — *среднее геометрическое*;

$A_n = \dfrac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}$ — *среднее арифметическое*;

$Q_n = \sqrt{\dfrac{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2}{n}}$ — *среднее квадратическое чисел* $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

Между этими величинами существует такая зависимость:

$$H_n \leqslant G_n \leqslant A_n \leqslant Q_n.$$

Некоторые частные случаи этой зависимости нами уже доказаны: в примере 1 — неравенство $G_2 \leqslant A_2$, в примере 6 — неравенство $G_4 \leqslant A_4$, в примере 11 — неравенство $A_3 \leqslant Q_3$; из неравенства, доказанного в примере 4, следует неравенство $G_3 \leqslant A_3$, а из неравенства, доказанного в примере 8, — неравенство $H_3 \leqslant A_3$. Ниже, в примере 17, мы докажем соотношение $G_n \leqslant A_n$.

Пример 12. Доказать неравенство

$$\cos t + 3\cos 3t + 6\cos 6t \geqslant -7\frac{3}{16}. \qquad (13)$$

Доказательство. Предположим противное, что при некотором значении переменной t выполняется неравенство

$\cos t + 3 \cos 3t + 6 \cos 6t < -7\frac{3}{16}$. Выполним некоторые преобразования этого неравенства:

$$\cos t + 3 \cos 3t + 6 \cos 6t + 6 < -1\frac{3}{16};$$

$$\cos t + 3 \cos 3t + 12 \cos^2 3t < -1\frac{3}{16};$$

$$3\left(4 \cos^2 3t + \cos 3t + \frac{1}{16}\right) + \cos t < -1;$$

$$3\left(2 \cos 3t + \frac{1}{4}\right)^2 + \cos t < -1.$$

Последнее неравенство неверно, поскольку при любых значениях t выполняются неравенства $3\left(\cos 3t + \frac{1}{4}\right)^2 \geqslant 0$ и $\cos t \geqslant -1$, а потому $3\left(\cos 3t + \frac{1}{4}\right)^2 + \cos t \geqslant -1$. Полученное противоречие означает, что сделанное нами предположение неверно, т. е. справедливо неравенство (13). ■

Пример 13. Доказать неравенство

$$\cos 36° > \operatorname{tg} 36°. \tag{14}$$

Доказательство. Предположим, что $\cos 36° \leqslant \operatorname{tg} 36°$. Тогда:

$$\cos 36° \leqslant \frac{\sin 36°}{\cos 36°};$$

$$\cos^2 36° \leqslant \sin 36°;$$

$$1 + \cos 72° \leqslant 2 \sin 36°;$$

$$1 + \sin 18° \leqslant 2 \sin (30° + 6°);$$

$$1 + 2 \sin 9° \cos 9° \leqslant 2(\sin 30° \cos 6° + \sin 6° \cos 30°);$$

$$1 + 2 \sin 9° \cos 9° \leqslant \cos 6° + 2 \sin 6° \cos 30°.$$

Последнее неравенство неверно, поскольку $1 > \cos 6°$, $\sin 9° > \sin 6°$, $\cos 9° > \cos 30°$ и, следовательно, $1 + 2 \sin 9° \cos 9° > \cos 6° + 2 \sin 6° \cos 30°$. Полученное противоречие означает, что сделанное нами предположение неверно, т. е. справедливо неравенство (14). ■

4. *Доказательство неравенств методом математической индукции*

Пример 14. Доказать, что если $n \in N$, $n \geqslant 3$, то

$$2^n > 2n + 1. \tag{15}$$

Доказательство. При $n = 3$ неравенство (15) верно: $2^3 > 2 \cdot 3 + 1$. Предположим, что оно верно при $n = k$ ($k \geqslant 3$), т. е.

$2^k > 2k + 1$, и докажем, что тогда оно верно и при $n = k + 1$, т. е. докажем, что $2^{k+1} > 2(k + 1) + 1$.

В самом деле, $2^{k+1} = 2 \cdot 2^k > 2(2k + 1) = 4k + 2 = (2k + 3) + (2k - 1)$. Итак, $2^{k+1} > (2k + 3) + (2k - 1)$. Но $2k - 1 > 0$ при любом натуральном значении k. Следовательно, $2^{k+1} > 2k + 3$.

Согласно принципу математической индукции можно сделать вывод о том, что неравенство (15) справедливо при всех $n \geqslant 3$. ■

Пример 15. Доказать, что для любых действительных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ справедливо неравенство

$$|a_1 + a_2 + \ldots + a_n| \leqslant |a_1| + |a_2| + \ldots + |a_n|. \qquad (16)$$

Доказательство. При $n = 2$ неравенство (16) принимает вид $|a_1 + a_2| \leqslant |a_1| + |a_2|$. Это верное неравенство, оно было доказано в § 5 учебника «Алгебра и начала математического анализа–10».

Предположим, что неравенство (16) верно при $n = k$ ($k \geqslant 2$), т. е.

$$|a_1 + a_2 + \ldots + a_k| \leqslant |a_1| + |a_2| + \ldots + |a_k|,$$

и докажем, что тогда оно верно и при $n = k + 1$, т. е. докажем, что

$$|a_1 + a_2 + \ldots + a_k + a_{k+1}| \leqslant |a_1| + |a_2| + \ldots + |a_k| + |a_{k+1}|.$$

В самом деле, пусть $a_1 + a_2 + \ldots + a_k = A_k$. Тогда

$$|a_1 + a_2 + \ldots + a_k + a_{k+1}| = |(a_1 + a_2 + \ldots + a_k) + a_{k+1}| =$$
$$= |A_k + a_{k+1}| \leqslant |A_k| + |a_{k+1}| = |a_1 + a_2 + \ldots + a_k| + |a_{k+1}| \leqslant |a_1| +$$
$$+ |a_2| + \ldots + |a_k| + |a_{k+1}|.$$

По принципу математической индукции неравенство (16) верно для любых действительных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$. ■

Пример 16. Доказать неравенство

$$\operatorname{tg} n\alpha > n \operatorname{tg} \alpha, \qquad (17)$$

если $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{4(n-1)}$, n — натуральное число, $n \neq 1$.

Доказательство. Проверим справедливость неравенства (17) при $n = 2$, т. е. убедимся, что

$$\operatorname{tg} 2\alpha > 2 \operatorname{tg} \alpha, \qquad (18)$$

где $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{4}$.

В самом деле, $\operatorname{tg} 2\alpha - 2 \operatorname{tg} \alpha = \dfrac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha} - 2 \operatorname{tg} \alpha = 2 \operatorname{tg} \alpha \dfrac{\operatorname{tg}^2 \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}$.

При $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{4}$ имеем $\operatorname{tg}\alpha > 0$, $1 - \operatorname{tg}^2\alpha > 0$, а значит,

$$2 \operatorname{tg}\alpha \frac{\operatorname{tg}^2\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2\alpha} > 0.$$

Отсюда и следует, что неравенство (18) верно.

Предположим, что неравенство (17) выполняется при $n = k (k > 1)$, т. е. $\operatorname{tg} k\alpha > k \operatorname{tg}\alpha$, где $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{4(k-1)}$. Докажем, что тогда неравенство (17) выполняется при $n = k + 1$, т. е.

$$\operatorname{tg}(k+1)\alpha > (k+1)\operatorname{tg}\alpha, \tag{19}$$

где $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{4k}$.

В самом деле,

$$\operatorname{tg}(k+1)\alpha = \operatorname{tg}(k\alpha + \alpha) = \frac{\operatorname{tg} k\alpha + \operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg} k\alpha \operatorname{tg}\alpha} > \frac{k \operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg} k\alpha \operatorname{tg}\alpha}.$$

По условию $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{4k}$, значит, $\operatorname{tg} k\alpha < \operatorname{tg}\dfrac{\pi}{4} = 1$ и $\operatorname{tg}\alpha < 1$. Но тогда $0 < 1 - \operatorname{tg} k\alpha \operatorname{tg}\alpha < 1$ и, следовательно, $\dfrac{k \operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg} k\alpha \operatorname{tg}\alpha} > (k+1)\operatorname{tg}\alpha$.

Неравенство (19) доказано.

По принципу математической индукции заключаем, что неравенство (17) верно для любых натуральных $n \geqslant 2$. ■

Пример 17. а) Доказать, что если положительные числа $x_1, x_2, \ldots, x_n$ таковы, что $x_1 x_2 \cdot \ldots \cdot x_n = 1$, то $x_1 + x_2 + \ldots + x_n \geqslant n$.

б) Доказать, что для любого натурального числа $n \geqslant 2$ справедливо неравенство $\dfrac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \geqslant \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdot \ldots \cdot a_n}$, где все числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$ положительны (*среднее арифметическое n положительных чисел не меньше их среднего геометрического — неравенство Коши*).

Решение. а) Проверим выполнение утверждения для $n = 2$. Пусть произведение двух положительных чисел x_1, x_2 равно 1. Поскольку $\dfrac{x_1 + x_2}{2} \geqslant \sqrt{x_1 x_2}$, получаем, что $x_1 + x_2 \geqslant 2$, что и требовалось установить.

Предположим, что утверждение выполняется для $n = k$, т. е. предположим, что если $x_1 x_2 \cdot \ldots \cdot x_k = 1$, где все множители — положительные числа, то $x_1 + x_2 + \ldots + x_k \geqslant k$. Докажем, что тогда из равенства $x_1 x_2 \cdot \ldots \cdot x_k \cdot x_{k+1} = 1$ следует неравенство $x_1 + x_2 + \ldots + x_k + x_{k+1} \geqslant k + 1$.

Если $x_1 = x_2 = \ldots = x_k = x_{k+1} = 1$, то $x_1 + x_2 + \ldots + x_k + x_{k+1} = k + 1$; можно записать и так: $x_1 + x_2 + \ldots + x_k + x_{k+1} \geqslant k + 1$. Значит, в этом тривиальном случае утверждение выполняется. Если в произведении $x_1x_2 \cdot \ldots \cdot x_kx_{k+1}$ не все множители равны 1, то найдётся хотя бы одна пара чисел таких, что одно больше 1, а другое меньше 1; обозначим эти числа соответственно x_k и x_{k+1}, а их произведение обозначим X_k.

Имеем $x_1x_2 \cdot \ldots \cdot x_{k-1}x_kx_{k+1} = 1$, т. е. $x_1x_2 \cdot \ldots \cdot x_{k-1}X_k = 1$. Поскольку произведение k положительных чисел равно 1, то по индукционному предположению их сумма не меньше k:

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_{k-1} + X_k \geqslant k.$$

Докажем, что $X_k < x_k + x_{k+1} - 1$.

В самом деле, $X_k - (x_k + x_{k+1} - 1) = 1 + x_kx_{k+1} - x_k - x_{k+1} = (x_k - 1)(x_{k+1} - 1)$. Выше мы отметили, что $x_k > 1$, а $x_{k+1} < 1$. Значит, $(x_k - 1)(x_{k+1} - 1) < 0$, а потому $X_k < x_k + x_{k+1} - 1$.

А теперь рассмотрим интересующую нас сумму $x_1 + x_2 + \ldots + x_{k+1}$. Имеем: $(x_1 + x_2 + \ldots + x_{k-1}) + (x_k + x_{k+1}) > (x_1 + x_2 + \ldots + x_{k-1}) + X_k + 1 \geqslant k + 1$.

По принципу математической индукции утверждение доказано для любого натурального числа $n \geqslant 2$.

б) Введём обозначение: $A = \sqrt[n]{a_1a_2 \cdot \ldots \cdot a_n}$. Справедливо равенство $\frac{a_1}{A} \cdot \frac{a_2}{A} \cdot \ldots \cdot \frac{a_n}{A} = 1$. Но тогда согласно утверждению, доказанному в пункте а), выполняется неравенство $\frac{a_1}{A} + \frac{a_2}{A} + \ldots + \frac{a_n}{A} \geqslant n$, т. е. $\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}$ A, что и требовалось доказать. ■

5. Функционально-графические методы доказательства неравенств

Пример 18. Доказать, что

$$\operatorname{tg} t_1 < \frac{\sin t_1 + \sin t_2 + \ldots + \sin t_n}{\cos t_1 + \cos t_2 + \ldots + \cos t_n} < \operatorname{tg} t_n,$$

если $0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n < \frac{\pi}{2}$.

Доказательство. Так как в интервале $\left(0;\ \frac{\pi}{2}\right)$ функция $y = \sin x$ возрастает, а функция $y = \cos x$ убывает, то в этом интервале выполняются следующие соотношения:

$$0 < \sin t_1 < \sin t_2 < \ldots < \sin t_n,$$
$$\cos t_1 > \cos t_2 > \ldots > \cos t_n > 0.$$

Но тогда

$$n \sin t_1 < \sin t_1 + \sin t_2 + \ldots + \sin t_n < n \sin t_n,$$
$$n \cos t_1 > \cos t_1 + \cos t_2 + \ldots + \cos t_n > n \cos t_n,$$

а потому $\dfrac{n\ \sin\ t_1}{n\ \cos\ t_1} < \dfrac{\sin\ t_1 + \sin\ t_2 + \ldots + \sin\ t_n}{\cos\ t_1 + \cos\ t_2 + \ldots + \cos\ t_n} < \dfrac{n\ \sin\ t_n}{n\ \cos\ t_n}$,

т. е. $\text{tg}\ t_1 < \dfrac{\sin\ t_1 + \sin\ t_2 + \ldots + \sin\ t_n}{\cos\ t_1 + \cos\ t_2 + \ldots + \cos\ t_n} < \text{tg}\ t_n$, что и требовалось доказать. ■

Пример 19. Доказать, что $\text{tg}\ t - \text{tg}\ u < t - u$, если $0 < t < u < \dfrac{\pi}{2}$.

Доказательство. Рассмотрим функцию $y = \text{tg}\ x - x$ на интервале $\left(0;\ \dfrac{\pi}{2}\right)$, найдём её производную: $y' = \dfrac{1}{\cos^2 x} - 1$. На указанном интервале выполняется неравенство $y' > 0$, значит, функция возрастает. Но тогда для любых t и u из этого интервала таких, что $t < u$, выполняется неравенство $\text{tg}\ t - t < \text{tg}\ u - u$, откуда и получается требуемое неравенство. ■

Пример 20. Доказать, что для любых значений x выполняется неравенство $3x^4 - 8x^3 - 6x^2 + 24x + 20 > 0$.

Доказательство. Рассмотрим функцию $y = f(x)$, где $f(x) = 3x^4 - 8x^3 - 6x^2 + 24x + 20$. Найдём её производную: $f'(x) = 12x^3 - 24x^2 - 12x + 24 = 12x^2(x - 2) - 12(x - 2) = 12(x - 2)(x - 1)(x + 1)$. Эта производная существует при всех значениях x

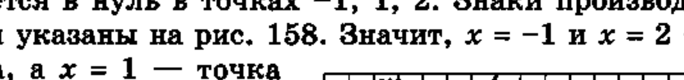


Рис. 158

и обращается в нуль в точках -1, 1, 2. Знаки производной схематически указаны на рис. 158. Значит, $x = -1$ и $x = 2$ — точки минимума, а $x = 1$ — точка максимума функции. Вычислим значения функции в точках экстремума: $f(-1) = 1$, $f(1) = 33$, $f(2) = 28$. На рис. 159 схематически (с разными масштабами по осям координат) представлен график функции $y = f(x)$. Замечаем, что $y_{\text{наим}} = 1$, т. е. для любых значений x выполняется неравенство $f(x) \geqslant 1$ и тем более $f(x) > 0$, что и требовалось доказать. ■

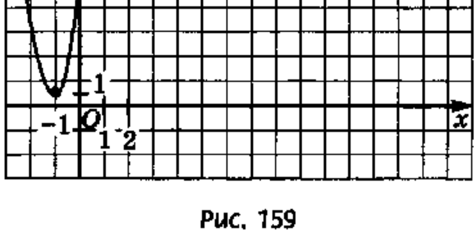


Рис. 159

Вопросы для самопроверки

1. Что называют неравенством Коши?

2. В чём состоит суть метода доказательства неравенства с помощью определения?

3. В чём состоит суть синтетического метода доказательства неравенства?

4. В чём состоит суть доказательства неравенства методом от противного?

§ 32. *Уравнения и неравенства с двумя переменными*

Напомним, что **решением уравнения с двумя переменными** $p(x;\ y) = 0$ называют всякую пару чисел $(x;\ y)$, которая обращает уравнение в верное числовое равенство. Например, уравнение $(2x - 6)^2 + (3y + 12)^4 = 0$ имеет только одно решение — пару $(3;\ -4)$, поскольку сумма двух неотрицательных чисел может равняться нулю тогда и только тогда, когда каждое слагаемое равно нулю. Но, как правило, решений у уравнения с двумя переменными бесконечно много. Например, уравнению $x^2 + y^2 = 9$ удовлетворяет любая пара $(x;\ y)$ такая, что точка координатной плоскости $M(x;\ y)$ принадлежит окружности радиусом 3 с центром в начале координат (рис. 160). Переход к геометрической модели — графику уравнения $p(x;\ y) = 0$ — является одним из наиболее удобных приёмов решения уравнения с двумя переменными.

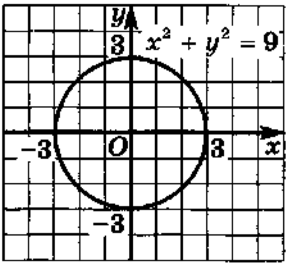


Рис. 160

Если дано целое рациональное уравнение с несколькими переменными и с целочисленными коэффициентами и если поставлена задача найти целочисленные (или, в более общем случае, рациональные) его решения, то говорят, что задано *диофантово уравнение* (в честь древнегреческого математика Диофанта).

В большинстве случаев решение диофантовых уравнений сопряжено со значительными трудностями. Иногда они преодолеваются с помощью свойств делимости целых чисел — так будет обстоять дело в следующих ниже двух примерах.

Пример 1. Найти целочисленные решения уравнения $3x + 4y = 19$.

Решение. Выразив из заданного уравнения x, получим: $x = \frac{19 - 4y}{3}$. Нас интересуют лишь целочисленные решения уравнения, поэтому целое число $19 - 4y$ должно делиться без остатка на 3.

Для целого числа y имеются три возможности по отношению к его делимости на число 3: 1) число y делится на 3, т. е. $y = 3k$; 2) число y при делении на 3 даёт в остатке 1, т. е. $y = 3k + 1$; 3) число y при делении на 3 даёт в остатке 2, т. е. $y = 3k + 2$.

Если $y = 3k$, то $19 - 4y = 19 - 12k$; это число на 3 не делится ($12k$ делится на 3, а 19 — нет, значит, разность $19 - 12k$ не делится на 3).

Если $y = 3k + 1$, то $19 - 4y = 19 - 4(3k + 1) = 15 - 12k = 3(5 - 4k)$; это число делится на 3.

Если $y = 3k + 2$, то $19 - 4y = 19 - 4(3k + 2) = 11 - 12k$; это число не делится на 3.

Итак, нас устраивает единственная возможность: $y = 3k + 1$; тогда $x = \frac{19 - 4y}{3} = \frac{3(5 - 4k)}{3} = 5 - 4k$. Значит, целочисленным решением уравнения служит любая пара вида $(5 - 4k;\ 3k + 1)$, где $k \in \mathbf{Z}$.

Чтобы вам был понятнее полученный результат, дадим параметру k несколько конкретных целочисленных значений.

Пусть $k = 0$; тогда пара $(5 - 4k;\ 3k + 1)$ превращается в $(5; 1)$. Подставив значения $x = 5$, $y = 1$ в уравнение $3x + 4y = 19$, получим $15 + 4 = 19$ — верное равенство.

Пусть $k = 1$; тогда пара $(5 - 4k;\ 3k + 1)$ превращается в $(1; 4)$. Подставив значения $x = 1$, $y = 4$ в уравнение $3x + 4y = 19$, получим $3 + 16 = 19$ — верное равенство.

Пусть $k = -1$; тогда пара $(5 - 4k;\ 3k + 1)$ превращается в $(9; -2)$. Подставив значения $x = 9$, $y = -2$ в уравнение $3x + 4y = 19$, получим $27 - 8 = 19$ — верное равенство.

Так же обстоит дело со всеми остальными целочисленными значениями параметра k.

Ответ: $(5 - 4k;\ 3k + 1)$, где $k \in \mathbf{Z}$.

Пример 2. Найти целочисленные решения уравнения $9x^2 - 4y^2 = 17$.

Решение. Перепишем уравнение в виде $(3x - 2y)(3x + 2) = 17$. Левая часть уравнения представляет собой произведение двух целых чисел. Это произведение может равняться 17 лишь в четырёх случаях: когда первый множитель равен 1, а второй 17; когда первый множитель равен -1, а второй -17; когда первый множитель равен 17, а второй 1; когда первый множитель равен -17, а второй -1. Значит, задача сводится к решению совокупности четырёх систем уравнений:

$$\begin{cases} 3x - 2y = 1, \\ 3x + 2y = 17; \end{cases} \begin{cases} 3x - 2y = -1, \\ 3x + 2y = -17; \end{cases} \begin{cases} 3x - 2y = 17, \\ 3x + 2y = 1; \end{cases} \begin{cases} 3x - 2y = -17, \\ 3x + 2y = -1. \end{cases}$$

Из первой системы находим $x = 3$, $y = 4$, из второй — $x = -3$, $y = -4$, из третьей — $x = 3$, $y = -4$, из четвёртой — $x = -3$, $y = 4$.

Ответ: $(3; 4)$, $(-3; -4)$, $(3; -4)$, $(-3; 4)$.

Пример 3. Купили несколько тетрадей в линейку по 8 р. и в клетку по 13 р., затратив на всю покупку 150 р. Сколько куплено тетрадей каждого вида?

Решение. Пусть x — число купленных тетрадей в линейку, а y — число купленных тетрадей в клетку. Тогда математической моделью задачи служит диофантово уравнение $8x + 13y = 150$. По смыслу задачи x может принимать значения 1, 2, 3, ..., 18 (значение $x = 19$ уже не подходит, поскольку $8 \cdot 19 > 150$), а y может принимать значения 1, 2, 3, ..., 11. Конечно, можно решить уравнение подбором, но перебор возможных пар $(x; y)$ состоит из $18 \cdot 11 = 198$ вариантов. Некоторые рассуждения помогут нам упростить этот процесс.

Во-первых, замечаем, что y не может быть нечётным числом, поскольку при нечётном y левая часть уравнения — нечётное число, 150 никак не получится. Значит, для y оставляем такие возможности: 2, 4, 6, 8, 10. Впрочем, удобнее представить y в виде $2n$, где $n = 1, 2, 3, 4, 5$.

Во-вторых, переписав уравнение в виде $8x + 13 \cdot 2n = 150$, т. е. $4x + 13n = 75$, замечаем, что n должно быть нечётным числом, значит, для n оставляем три возможности: $n = 1, 3, 5$.

Теперь можно заняться вычислениями. Если $n = 1$, то из уравнения $4x + 13n = 75$ находим, что $x = 15{,}5$; это нас не устраивает. Если $n = 3$, то из уравнения $4x + 13n = 75$ находим, что $x = 9$; это нас устраивает. Если $n = 5$, то из уравнения $4x + 13n = 75$ находим, что $x = 2{,}5$; это нас не устраивает.

Итак, $x = 9$ при $n = 3$, т. е. при $y = 6$. Таким образом, уравнение имеет единственное решение (в натуральных числах): $x = 9$, $y = 6$.

Ответ: куплено 9 тетрадей в линейку и 6 тетрадей в клетку.

Теперь поговорим о решении неравенств вида $p(x; y) > 0$ ($p(x; y) < 0$), где $p(x; y)$ — алгебраическое выражение. **Решением неравенства $p(x; y) > 0$** называют всякую пару чисел $(x; y)$, которая удовлетворяет этому неравенству, т. е. обращает неравенство с переменными $p(x; y) > 0$ в верное числовое неравенство. Например, пара (2; 1) является решением неравенства $2x + 3y > 0$ ($2 \cdot 2 + 3 \cdot 1 > 0$ — верное числовое неравенство), а пара $(0; -1)$ не является решением этого неравенства.

Чтобы найти все решения неравенства с двумя переменными, чаще всего опираются на график уравнения $p(x; y) = 0$. Как рассуждают дальше, покажем на примерах.

Пример 4. Решить неравенство $2x + 3y > 0$.

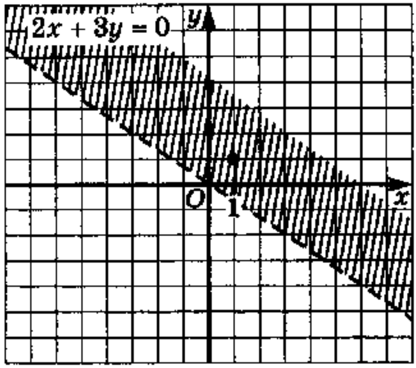


Рис. 161

Решение. Графиком уравнения $2x + 3y = 0$ является прямая, проходящая через начало координат (0; 0) и, например, точку (3; −2) (координаты обеих точек удовлетворяют уравнению $2x + 3y = 0$). Эта прямая изображена на рис. 161. Все решения заданного неравенства геометрически изображаются точками полуплоскости, расположенной либо выше, либо ниже построенной прямой. Чтобы правильно выбрать нужную полуплоскость, возьмём любую точку одной из них и подставим координаты такой контрольной точки в заданное неравенство. Если получится верное числовое неравенство, то полуплоскость выбрана верно, если нет, то неверно.

Возьмём в качестве контрольной точку (1; 1) из верхней полуплоскости и подставим её координаты в заданное неравенство. Получим $2 \cdot 1 + 3 \cdot 1 > 0$ — верное числовое неравенство.

Итак, геометрической моделью решений заданного неравенства является полуплоскость, расположенная выше прямой $2x + 3y = 0$ (рис. 161). ■

Пример 5. Решить неравенство $xy < 2$.

Решение. Если $x = 0$, то неравенство принимает вид $0 < 2$, это верное неравенство, значит, все точки оси y (прямая $x = 0$) принадлежат множеству решений неравенства. Если $x > 0$, то неравенство $xy < 2$ можно переписать в виде $y < \frac{2}{x}$. Значит, в правой полуплоскости (при $x > 0$) следует взять точки, лежащие ниже правой ветви гиперболы $y = \frac{2}{x}$. Если $x < 0$, то неравенство $xy < 2$ можно переписать в виде $y > \frac{2}{x}$. Значит, в левой полуплоскости (при $x < 0$) следует взять точки, лежащие выше левой ветви гиперболы. Множество решений неравенства $xy < 2$ изображено на рис. 162. ■

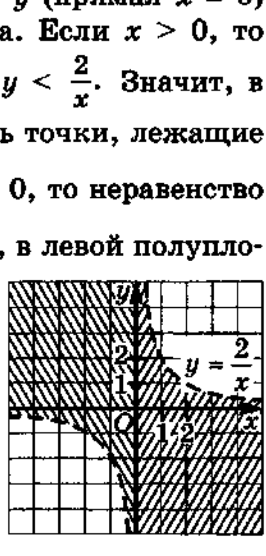


Рис. 162

Пример 6. Решить уравнение $|y - x^2| = x^2 - 2x$.

Решение. Если $y \geqslant x^2$, то $|y - x^2| = y - x^2$ и заданное уравнение принимает вид $y - x^2 =$

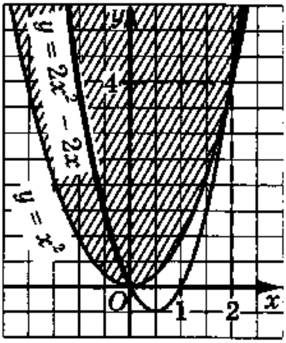


Рис. 163

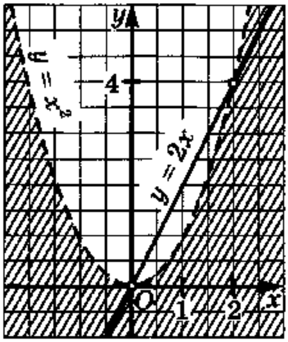


Рис. 164

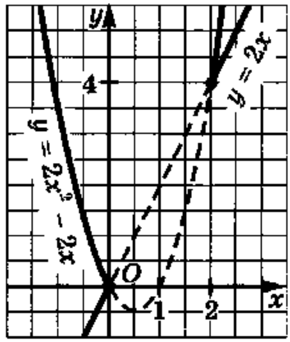


Рис. 165

$= x^2 - 2x$, т. е. $y = 2x^2 - 2x$. Если $y < x^2$, то $|y - x^2| = -(y - x^2)$ и заданное уравнение принимает вид $-(y - x^2) = x^2 - 2x$, т. е. $y = 2x$.

Неравенство $y \geqslant x^2$ означает, что нас интересуют точки, принадлежащие параболе $y = x^2$ и расположенные выше неё (рис. 163). При этом должно выполняться уравнение $y = 2x^2 - 2x$, т. е. интересующие нас точки должны лежать на параболе $y = 2x^2 - 2x$. Указанные две параболы пересекаются в точках (0; 0) и (2; 4). Решения уравнения — точки, принадлежащие выделенной на рис. 163 части параболы $y = 2x^2 - 2x$.

Неравенство $y < x^2$ означает, что нас интересуют точки, расположенные ниже параболы $y = x^2$ (рис. 164). При этом должно выполняться уравнение $y = 2x$, т. е. интересующие нас точки должны лежать на прямой $y = 2x$. Решения уравнения — точки, принадлежащие выделенной на рис. 164 части прямой.

Решения заданного уравнения — точки графика уравнения, представленного на рис. 165. ■

Выше мы говорили о решении неравенств с двумя переменными. Развивая эту линию, можно рассматривать и системы неравенств с двумя переменными. *Решить систему неравенств с двумя переменными* — это значит найти множество всех таких точек координатной плоскости, координаты которых удовлетворяют *одновременно всем* неравенствам системы, т. е. речь идёт о *пересечении* решений неравенств системы.

Рис. 166

П р и м е р 7. Решить систему неравенств

$$\begin{cases} y \geqslant x^2 - 4x + 1, \\ y \leqslant x - 3. \end{cases}$$

Р е ш е н и е. Надо найти *пересечение* множества решений неравенства $y \geqslant x^2 - 4x + 1$ (рис. 166) и неравенства $y \leqslant x - 3$ (рис. 167).

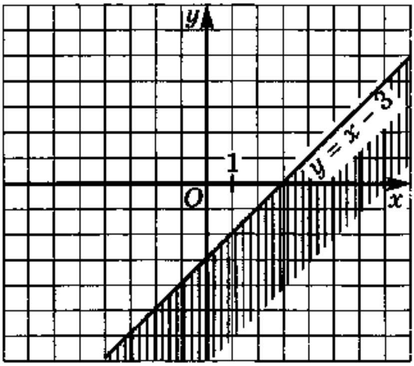


Рис. 167

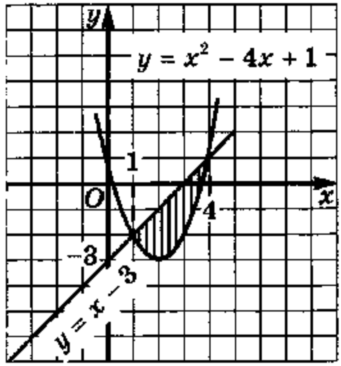


Рис. 168

Искомое множество решений изображено на рис. 168 — *параболический сегмент*. ■

Вопросы для самопроверки

1. Что называют решением уравнения с двумя переменными?

2. Решите уравнение:

а) $(x-1)^2+(y+2)^4=0$; в) $\sin^2 x+\cos^2 y=2$.

б) $\sqrt{2x-3}+\sqrt{3y+4}=0$;

3. Расскажите, как в прямоугольной системе координат xOy вы найдёте решение неравенства:

а) $y>2x-3$; г) $y<\sqrt{x}$;

б) $y\leqslant 2x-3$; д) $2x+3y>6$;

в) $y\geqslant x^2$; е) $(x-1)^2+(y-2)^2\leqslant 4$.

4. Расскажите, как в прямоугольной системе координат xOy вы найдёте решение системы неравенств:

а) $\begin{cases} x-2y>0, \\ 2x+y<0; \end{cases}$ б) $0<y-x^2<4$.

§ 33. *Системы уравнений*

В курсе алгебры 7—9-го классов вы неоднократно встречались с системами двух рациональных уравнений с двумя переменными. Для их решения использовали метод подстановки, метод алгебраического сложения, метод введения новых переменных, графический метод. В главе 3 нам встречались системы показательных и логарифмических уравнений, и мы убедились, что используются те же методы решения. В этом параграфе мы на ряде примеров несколько расширим представление о решении систем уравнений: познакомимся с новыми методами, рассмотрим ранее не встречавшиеся классы систем уравнений, например иррациональных и тригонометрических, рассмотрим системы уравнений не только с двумя переменными.

Определение 1. Если поставлена задача — найти такие пары значений $(x;\ y)$, которые одновременно удовлетворяют уравнению $p(x;\ y) = 0$ и уравнению $q(x;\ y) = 0$, то говорят, что данные уравнения образуют **систему уравнений:**

$$\begin{cases} p(x; y) = 0, \\ q(x; y) = 0. \end{cases}$$

Пару значений $(x;\ y)$, которая одновременно является решением и первого, и второго уравнения системы, называют решением системы уравнений. *Решить систему уравнений* — значит найти все её решения или установить, что решений нет.

Можно говорить и о системе из трёх уравнений с тремя переменными:

$$\begin{cases} p(x; y; z) = 0, \\ q(x; y; z) = 0, \\ r(x; y; z) = 0. \end{cases}$$

В этом случае речь идёт об отыскании троек чисел $(x;\ y;\ z)$, удовлетворяющих одновременно всем уравнениям системы. Вообще можно говорить о системе, содержащей любое число уравнений с любым числом переменных.

Вы знаете, что основная идея решения уравнения состоит в постепенном переходе от одного уравнения к другому, более простому, но равносильному заданному. Если же осуществляется переход к уравнению-следствию, то обязательна проверка найденных корней, поскольку среди них могут оказаться посторонние для заданного уравнения. Так же обстоит дело и при решении систем уравнений.

Определение 2. Две системы уравнений называют **равносильными,** если они имеют одни и те же решения или если обе системы не имеют решений.

Метод подстановки, метод алгебраического сложения и метод введения новых переменных, которые вы изучили ранее, абсолютно корректны с точки зрения равносильности. Иными словами, используя эти методы, мы заменяем одну систему уравнений другой, более простой, но равносильной первоначальной системе. Если же в процессе решения системы использовались неравносильные преобразования (возведение в квадрат обеих частей уравнения, умножение уравнений системы или преобразования, которые привели к расширению области определения какого-либо уравнения системы), то все найденные решения следует проверить подстановкой в исходную систему.

Пример 1. Решить систему уравнений $\begin{cases} xy - 6 = \dfrac{y^3}{x}, \\ xy + 24 = \dfrac{x^3}{y}. \end{cases}$

Решение. Перемножив уравнения системы, получим:

$$(xy - 6)(xy + 24) = \frac{y^3}{x} \cdot \frac{x^3}{y};$$

$$(xy - 6)(xy + 24) = x^2y^2.$$

Введём новую переменную $z = xy$. Получим: $(z - 6)(z + 24) = z^2$; $z^2 - 6z + 24z - 144 = z^2$; $18z = 144$; $z = 8$.

Итак, перемножив оба уравнения системы, мы получили довольно простую зависимость между переменными: $xy = 8$. Это уравнение рассмотрим совместно с одним из уравнений исходной системы, например с первым:

$$\begin{cases} xy - 6 = \dfrac{y^3}{x}, \\ xy = 8. \end{cases}$$

Теперь можно воспользоваться методом подстановки. Выразим из второго уравнения x через y и подставим полученное выражение вместо x в первое уравнение системы

$$\begin{cases} x = \dfrac{8}{y}, \\ 8 - 6 = y^3 : \left(\dfrac{8}{y}\right). \end{cases}$$

После упрощений второе уравнение принимает вид $y^4 = 16$, откуда получаем: $y_1 = 2$, $y_2 = -2$. Используя соотношение $x = \dfrac{8}{y}$, находим соответственно: $x_1 = 4$, $x_2 = -4$.

Итак, получили два решения: (4; 2), (−4; −2). Но поскольку в процессе решения системы использовался «ненадёжный» (с точки зрения равносильности) метод умножения уравнений системы, найденные пары значений надо проверить подстановкой в заданную систему.

Подставив $x = 4$, $y = 2$ в уравнения заданной системы, получим:

$$\begin{cases} 8 - 6 = \dfrac{2^3}{4}, \\ 8 + 24 = \dfrac{4^3}{2}; \end{cases}$$

это два верных числовых равенства.

Подставив $x = -4$, $y = -2$ в уравнения заданной системы, получим:

$$\begin{cases} 8 - 6 = \dfrac{(-2)^3}{(-4)}, \\ 8 + 24 = \dfrac{(-4)^3}{(-2)}; \end{cases}$$

это тоже два верных числовых равенства.

Значит, обе найденные пары удовлетворяют заданной системе уравнений.

Ответ: (4; 2); (−4; −2).

Пример 2. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{\dfrac{3x - 2y}{2x}} + \sqrt{\dfrac{2x}{3x - 2y}} = 2, \\ 4y^2 - 1 = 3y(x - 1). \end{cases}$$

Решение. Воспользуемся методом введения новой переменной: $z = \sqrt{\dfrac{3x - 2y}{2x}}$. Тогда первое уравнение системы примет вид $z + \dfrac{1}{z} = 2$. Решим это уравнение:

$$z^2 + 1 = 2z, \ \ z^2 - 2z + 1 = 0, \ \ (z - 1)^2 = 0, \ \ z = 1.$$

Возвращаясь к переменным x, y, получаем уравнение

$$\sqrt{\frac{3x - 2y}{2x}} = 1.$$

Поработаем с этим уравнением:

$$\frac{3x - 2y}{2x} = 1^2, \quad 3x - 2y = 2x, \quad x = 2y.$$

Итак, первое уравнение системы нам удалось заменить более простым уравнением $x = 2y$. Рассмотрев его совместно со вторым уравнением заданной системы, получим более простую систему уравнений

$$\begin{cases} x = 2y, \\ 4y^2 - 1 = 3y(x - 1), \end{cases}$$

для решения которой «напрашивается» метод подстановки, поскольку уже имеется готовое выражение переменной x через переменную y. Подставим его во второе уравнение:

$$4y^2 - 1 = 3y(2y - 1);$$

$$2y^2 - 3y + 1 = 0;$$

$$y_1 = 1, \quad y_2 = \frac{1}{2}.$$

Поскольку $x = 2y$, то получаем соответственно: $x_1 = 2$, $x_2 = 1$.

Итак, получили два решения: $(2;\ 1)$, $\left(1;\ \frac{1}{2}\right)$. Но поскольку в процессе решения системы использовался «ненадёжный» (с точки зрения равносильности) метод — возведение в квадрат обеих частей одного из уравнений, — найденные пары значений надо проверить подстановкой в заданную систему. Эта проверка показывает, что посторонних решений нет.

Ответ: $(2;\ 1)$; $\left(1;\ \frac{1}{2}\right)$.

Пример 3. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \sin x \sin y = 0{,}75, \\ \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y = 3. \end{cases}$$

Решение. Имеем:

$$\begin{cases} \sin x \sin y = 0{,}75, \\ \dfrac{\sin x \sin y}{\cos x \cos y} = 3. \end{cases}$$

Применим метод деления: разделим левую часть первого уравнения системы на левую часть второго уравнения, а правую — на правую. Получим $\cos x \cos y = \frac{1}{4}$. Сразу заметим, что при этом делении потери решений не произойдёт, поскольку обе части второго уравнения системы, которое мы использовали как бы в качестве делителя, не могут одновременно обратиться в нуль. Мы получаем более простую (хотя бы по внешнему виду) систему тригонометрических уравнений

$$\begin{cases} \sin x \sin y = 0{,}75, \\ \cos x \cos y = 0{,}25. \end{cases}$$

Теперь воспользуемся методом алгебраического сложения. Сложив оба уравнения системы, получим:

$$\sin x \sin y + \cos x \cos y = 1,$$

т. е. $\cos(x - y) = 1$. Вычтя первое уравнение системы из второго, получим:

$$\cos x \cos y - \sin x \sin y = 0{,}25 - 0{,}75,$$

т. е. $\cos(x + y) = -0{,}5$.

Получили более простую систему уравнений:

$$\begin{cases} \cos(x - y) = 1, \\ \cos(x + y) = -0{,}5. \end{cases}$$

Из первого уравнения находим $x - y = 2\pi k$, $k \in Z$, из второго — $x + y = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in Z$.

Удобнее записать полученный результат в виде двух систем уравнений относительно переменных x и y:

$$\begin{cases} x - y = 2\pi k, \\ x + y = \frac{2\pi}{3} + 2\pi n; \end{cases} \quad \begin{cases} x - y = 2\pi k, \\ x + y = -\frac{2\pi}{3} + 2\pi n. \end{cases}$$

Сложив уравнения первой системы, получим: $2x = 2\pi k + \frac{2\pi}{3} + 2\pi n$, откуда $x = \frac{\pi}{3} + \pi(n + k)$.

Вычтя в первой системе первое уравнение из второго, получим: $2y = -2\pi k + \frac{2\pi}{3} + 2\pi n$, откуда $y = \frac{\pi}{3} + \pi(n - k)$.

Сделав то же самое со второй системой уравнений, получим:

$$\begin{cases} x = -\frac{\pi}{3} + \pi(n + k), \\ y = -\frac{\pi}{3} + \pi(n - k). \end{cases}$$

Ответ: $\begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + \pi(n + k), \\ y = \frac{\pi}{3} + \pi(n - k); \end{cases} \quad \begin{cases} x = -\frac{\pi}{3} + \pi(n + k), \\ y = -\frac{\pi}{3} + \pi(n - k), \end{cases}$

где $k \in Z$, $n \in Z$.

Пример 4. Составить уравнение параболы $y = ax^2 + bx + c$, если известно, что она проходит через точки $(1;\ 1)$, $(2;\ 2)$ и $(-1;\ 11)$.

Р е ш е н и е. Речь идёт об отыскании коэффициентов a, b, c.

По условию парабола проходит через точку (1; 1). Подставив в уравнение $y = ax^2 + bx + c$ значения $x = 1$, $y = 1$, получим:

$$1 = a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + c;$$
$$a + b + c = 1.$$

По условию парабола проходит через точку (2; 2). Подставив в уравнение $y = ax^2 + bx + c$ значения $x = 2$, $y = 2$, получим:

$$2 = a \cdot 2^2 + b \cdot 2 + c;$$
$$4a + 2b + c = 2.$$

По условию парабола проходит через точку (−1; 11). Подставив в уравнение $y = ax^2 + bx + c$ значения $x = -1$, $y = 11$, получим:

$$11 = a \cdot (-1)^2 + b \cdot (-1) + c;$$
$$a - b + c = 11.$$

В итоге получаем систему из трёх уравнений с тремя переменными a, b, c:

$$\begin{cases} a + b + c = 1, \\ 4a + 2b + c = 2, \\ a - b + c = 11. \end{cases}$$

Выразим c из первого уравнения: $c = 1 - a - b$. Подставим полученное выражение вместо c во второе и третье уравнения системы:

$$4a + 2b + (1 - a - b) = 2;$$
$$3a + b = 1;$$

и соответственно

$$a - b + (1 - a - b) = 11;$$
$$-2b = 10;$$
$$b = -5.$$

Фактически мы получили более простую систему уравнений:

$$\begin{cases} b = -5, \\ 3a + b = 1, \\ c = 1 - a - b. \end{cases}$$

Подставив значение $b = -5$ во второе уравнение, получим: $a = 2$. Подставив найденные значения $a = 2$, $b = -5$ в третье уравнение, получим $c = 4$. Остаётся подставить найденные значения $a = 2$, $b = -5$, $c = 4$ в уравнение $y = ax^2 + bx + c$.

Ответ: $y = 2x^2 - 5x + 4$.

П р и м е р 5. Три трактора вспахивают поле. Чтобы вспахать всё поле, первому трактору требуется времени на 1 ч больше, чем второму, и на 2 ч меньше, чем третьему. Первый и третий тракторы при совместной работе вспашут всё поле за 2 ч 24 мин. Сколько времени уйдёт на вспашку поля при совместной работе трёх тракторов?

Решение. Первый этап. *Составление математической модели.*

Напомним, что если речь идёт о выполнении некоторой работы, не охарактеризованной в количественном плане, т. е. не сказано, сколько деталей надо сделать, сколько гектаров земли вспахать и т. д., то объём работы считают равным 1, а части работы выражают в долях единицы.

Пусть x ч — время, необходимое первому трактору, чтобы вспахать поле в одиночку;

y ч — время, необходимое второму трактору, чтобы вспахать поле в одиночку;

z ч — время, необходимое третьему трактору, чтобы вспахать поле в одиночку.

Тогда согласно условиям задачи $x - y = 1$, $z - x = 2$.

Если всё поле (т. е. 1) первый трактор может вспахать за x ч, то за 1 ч он вспашет часть поля, выражаемую дробью $\frac{1}{x}$:

$\frac{1}{x}$ — часть поля, которую вспашет первый трактор за 1 ч.

Аналогично,

$\frac{1}{y}$ — часть поля, которую вспашет второй трактор за 1 ч;

$\frac{1}{z}$ — часть поля, которую вспашет третий трактор за 1 ч.

По условию, работая вместе, первый и третий тракторы вспахали всё поле за 2 ч 24 мин, т. е. за $\frac{12}{5}$ ч. Это значит, что $\frac{12}{5} \cdot \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{z}\right) = 1$, т. е. $\frac{1}{x} + \frac{1}{z} = \frac{5}{12}$.

В итоге получаем систему из трёх уравнений с тремя переменными:

$$\begin{cases} x - y = 1, \\ z - x = 2, \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{z} = \frac{5}{12}. \end{cases}$$

Второй этап. *Работа с составленной моделью.*

Воспользуемся методом подстановки. Выразим z через x из второго уравнения системы: $z = x + 2$. Подставим выражение $x + 2$

вместо z в третье уравнение системы: $\frac{1}{x} + \frac{1}{x+2} = \frac{5}{12}$. Решая это рациональное уравнение, последовательно получаем:

$$\frac{1^{12(x+2)}}{x} + \frac{1^{12x}}{x+2} = \frac{5^{x(x+2)}}{12};$$

$$12x + 24 + 12x = 5x^2 + 10x;$$

$$5x^2 - 14x - 24 = 0;$$

$$x_1 = 4, \quad x_2 = -\frac{6}{5}.$$

Оба найденных значения удовлетворяют условию, при котором знаменатели алгебраических дробей не равны нулю: $x + 2 \neq 0$, $x \neq 0$, — т. е. являются корнями рационального уравнения.

Осталось найти соответствующие значения y и z. Для этого воспользуемся уравнениями $x - y = 1$ и $z - x = 2$.

Если $x = 4$, то из этих уравнений находим: $y = 3$, $z = 6$; если $x = -\frac{6}{5}$, то из тех же уравнений находим: $y = -\frac{11}{5}$, $z = \frac{4}{5}$.

Итак, составленная система уравнений имеет два решения: $(4; 3; 6)$ и $\left(-\frac{6}{5}; -\frac{11}{5}; \frac{4}{5}\right)$.

Третий этап. *Ответ на вопрос задачи.*

Во-первых, по смыслу задачи отрицательные значения переменных нас не устраивают, следовательно, оставляем только одну тройку значений $(4; 3; 6)$.

Во-вторых, нас спрашивают, сколько времени уйдёт на вспашку поля при совместной работе трёх тракторов? Будем рассуждать так.

За 1 ч первый трактор вспашет $\frac{1}{4}$ часть поля, второй — $\frac{1}{3}$, третий — $\frac{1}{6}$. Значит, при совместной работе они вспашут за 1 ч часть поля, выражаемую суммой трёх дробей, т. е. $\frac{1}{4} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6}$, а за t ч — соответственно $t\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6}\right)$, т. е. $\frac{3t}{4}$. Если они вспашут всё поле, то $\frac{3t}{4} = 1$, откуда $t = \frac{4}{3}$.

Осталось лишь уточнить, что $\frac{4}{3}$ ч = 1 ч 20 мин.

Ответ: 1 ч 20 мин.

Пример 6. Найти четыре числа, удовлетворяющие следующим условиям: первые три из них образуют конечную геометрическую прогрессию, последние три образуют конечную арифметическую прогрессию, сумма всех чисел равна 28, четвёртое число больше первого на 14.

Решение. Первый этап. *Составление математической модели.*

Обозначим искомые числа буквами x, y, z, t.

По условию числа x, y, z образуют конечную геометрическую прогрессию. Согласно характеристическому свойству геометрической прогрессии это означает, что

$$y^2 = xz.$$

По условию числа y, z, t образуют конечную арифметическую прогрессию. Согласно характеристическому свойству арифметической прогрессии это означает, что

$$2z = y + t.$$

Кроме того, из условия следует, что $x + y + z + t = 28$, а $t - x = 14$.

Таким образом, мы составили систему из четырёх уравнений с четырьмя переменными:

$$\begin{cases} y^2 = xz, \\ 2z = y + t, \\ x + y + z + t = 28, \\ t - x = 14. \end{cases}$$

Второй этап. *Работа с составленной моделью.*

Воспользуемся методом подстановки. Выразим t через x из четвёртого уравнения системы: $t = x + 14$. Подставим выражение $x + 14$ вместо t во второе и третье уравнения системы. Получим:

$$\begin{cases} y^2 = xz, \\ 2z = y + (x + 14), \\ x + y + z + (x + 14) = 28, \end{cases}$$

$$\text{т. е.} \begin{cases} y^2 = xz, \\ 2z = y + x + 14, \\ 2x + y + z = 14. \end{cases}$$

Снова воспользуемся методом подстановки. Выразим z через x и y из третьего уравнения системы: $z = 14 - 2x - y$. Подставим выражение $14 - 2x - y$ вместо z в первое и второе уравнения системы. Получим:

$$\begin{cases} y^2 = x(14 - 2x - y), \\ 2(14 - 2x - y) = y + x + 14, \end{cases}$$

$$\text{т. е. } \begin{cases} y^2 = x(14 - 2x - y), \\ 5x + 3y = 14. \end{cases}$$

В третий раз воспользуемся методом подстановки. Выразим y через x из второго уравнения системы: $y = \frac{14 - 5x}{3}$; подставим это выражение вместо y в первое уравнение системы:

$$\left(\frac{14 - 5x}{3}\right)^2 = x\left(14 - 2x - \frac{14 - 5x}{3}\right);$$

$$(14 - 5x)^2 = 9(14x - 2x^2) - 3(14x - 5x^2);$$
$$196 - 140x + 25x^2 = 126x - 18x^2 - 42x + 15x^2;$$
$$28x^2 - 224x + 196 = 0;$$
$$x^2 - 8x + 7 = 0;$$
$$x_1 = 1,\ x_2 = 7.$$

Если $x = 1$, то

$$y = \frac{14 - 5x}{3} = \frac{14 - 5}{3} = 3;$$
$$z = 14 - 2x - y = 14 - 2 - 3 = 9;$$
$$t = x + 14 = 1 + 14 = 15.$$

Если $x = 7$, то

$$y = \frac{14 - 5x}{3} = \frac{14 - 35}{3} = -7;$$
$$z = 14 - 2x - y = 14 - 14 + 7 = 7;$$
$$t = x + 14 = 7 + 14 = 21.$$

Третий этап. *Ответ на вопрос задачи.*

Мы нашли две четвёрки чисел: 1, 3, 9, 15 и 7, −7, 7, 21. Обе удовлетворяют всем четырём условиям задачи.

Ответ: 1, 3, 9, 15 или 7, −7, 7, 21.

Вопросы для самопроверки

1. Что называют системой двух уравнений с двумя переменными? Что называют решением такой системы?

2. Какие две системы двух уравнений с двумя переменными называют равносильными?

3. Какие вы знаете методы решения системы двух уравнений с двумя переменными?

4. В чём суть метода подстановки при решении системы двух уравнений с двумя переменными?

5. В чём суть метода алгебраического сложения при решении системы двух уравнений с двумя переменными?

6. В чём суть метода введения новых переменных при решении системы двух уравнений с двумя переменными?

§ 34. Задачи с параметрами

Если дано уравнение $f(x; a) = 0$, которое надо решить относительно переменной x и в котором буквой a обозначено произвольное действительное число, то $f(x; a) = 0$ называют **уравнением с параметром** a. Основная трудность, связанная с решением уравнений (и тем более неравенств) с параметром, состоит в следующем. При одних значениях параметра уравнение не имеет корней, при других — имеет бесконечно много корней, при третьих — оно решается по одним формулам, при четвёртых — по другим. Как всё это учесть? Сразу скажем, что решению уравнений и неравенств с параметрами посвящено большое количество учебно-методической литературы. Наша задача весьма скромна: завершая изучение курса алгебры и начал математического анализа, дать вам некоторое представление о том, как рассуждают при решении уравнений и неравенств с параметрами. Для этого рассмотрим ряд примеров. В них всюду речь идёт только о действительных решениях уравнений и неравенств.

Пример 1. Решить относительно x:
а) уравнение $2a(a - 2)x = a - 2$;
б) неравенство $2a(a - 2)x > a - 2$.

Решение. а) Обычно корень уравнения вида $bx = c$ мы находим без труда: $x = \frac{c}{b}$, — поскольку в конкретном уравнении коэффициент b обычно отличен от нуля. В заданном уравнении коэффициент при x равен $2a(a - 2)$. Значение параметра a нам неизвестно, и в принципе оно может быть любым. Поэтому следует подстраховаться, т. е. сначала предусмотреть возможность обращения указанного коэффициента в нуль.

Рассмотрим следующие случаи:

$$1)\ a = 0;\quad 2)\ a = 2;\quad 3)\ a \neq 0,\ a \neq 2.$$

В первом случае (при $a = 0$) заданное уравнение принимает вид $0 \cdot x = -2$; это уравнение не имеет корней.

Во втором случае (при $a = 2$) заданное уравнение принимает вид $0 \cdot x = 0$; этому уравнению удовлетворяют любые значения переменной x.

В третьем случае (при $a \neq 0$, $a \neq 2$) коэффициент при x отличен от нуля и, следовательно, на этот коэффициент можно разделить обе части уравнения. Получим $x = \frac{a-2}{2a(a-2)}$, т. е. $x = \frac{1}{2a}$.

б) Решая неравенство, нужно учитывать знак коэффициента при x. Поэтому для решения заданного неравенства нужно рассмотреть не три случая, как это было в пункте а), а пять:

1) $a = 0$; 2) $a = 2$; 3) $a < 0$; 4) $0 < a < 2$; 5) $a > 2$.

В первом случае (при $a = 0$) заданное неравенство принимает вид $0 \cdot x > -2$; этому неравенству удовлетворяют любые значения переменной x.

Во втором случае (при $a = 2$) заданное неравенство принимает вид $0 \cdot x > 0$; это неравенство не имеет решений.

В третьем случае (при $a < 0$) коэффициент $2a(a - 2)$ положителен, значит, деля на него обе части заданного неравенства, знак неравенства следует оставить таким, каким он был:

$$x > \frac{a-2}{2a(a-2)}, \text{ т. е. } x > \frac{1}{2a}.$$

Сразу заметим, что так же будет обстоять дело и в пятом случае (при $a > 2$). В этом случае, как и в третьем, коэффициент $2a(a - 2)$ положителен и, решая заданное неравенство, получим $x > \frac{1}{2a}$.

Осталось рассмотреть четвёртый случай, когда $0 < a < 2$. В этом случае коэффициент $2a(a - 2)$ отрицателен, значит, деля на него обе части заданного неравенства, знак неравенства следует изменить на противоположный:

$$x < \frac{a-2}{2a(a-2)}, \text{ т. е. } x < \frac{1}{2a}.$$

Ответ: а) Если $a = 0$, то корней нет; если $a = 2$, то x — любое действительное число; если $a \neq 0$ и $a \neq 2$, то $x = \frac{1}{2a}$. б) Если $a = 2$, то решений нет; если $a = 0$, то x — любое действительное число; если $a < 0$ или $a > 2$, то $x > \frac{1}{2a}$; если $0 < a < 2$, то $x < \frac{1}{2a}$.

Пример 2. Решить уравнение

$$(a-1)x^2 + 2(2a+1)x + (4a+3) = 0.$$

Решение. По виду это уравнение представляется квадратным. Но (внимание!) значение параметра a нам неизвестно, и оно вполне может оказаться равным 1; в этом случае коэффициент при x^2 обращается в нуль и уравнение квадратным не является, оно будет линейным. Квадратные и линейные уравнения решаются по различным алгоритмам.

Итак, нам следует рассмотреть два случая: $a = 1$ и $a \neq 1$.

В первом случае (при $a = 1$) уравнение принимает следующий вид: $0 \cdot x^2 + 2 \cdot 3x + 7 = 0$, т. е. $6x + 7 = 0$. Решив это линейное уравнение, получим: $x = -\frac{7}{6}$.

Во втором случае (при $a \neq 1$) мы имеем квадратное уравнение

$$(a - 1)x^2 + 2(2a + 1)x + (4a + 3) = 0.$$

Найдём его дискриминант:

$$D = (2(2a + 1))^2 - 4(a - 1)(4a + 3) = 4(4a^2 + 4a + 1) - \\ - 4(4a^2 - a - 3) = 20a + 16 = 4(5a + 4).$$

Итак, $D = 4(5a + 4)$.

Дальнейшие рассуждения зависят от знака дискриминанта. Если $D < 0$, то квадратное уравнение не имеет действительных корней; если $D = 0$, то уравнение имеет один корень; если $D > 0$, то уравнение имеет два действительных корня. Дискриминант обращается в нуль при $a = -\frac{4}{5}$, положителен при $a > -\frac{4}{5}$, отрицателен при $a < -\frac{4}{5}$. Именно эти три случая нам и предстоит теперь рассмотреть.

Начнём со случая, когда $a < -\frac{4}{5}$. В этом случае $D < 0$ и, следовательно, квадратное уравнение не имеет корней.

Пусть теперь $a > -\frac{4}{5}$ (но, напомним, $a \neq 1$). В этом случае $D > 0$ и, следовательно, квадратное уравнение имеет два корня, которые мы найдём по известной формуле корней квадратного уравнения:

$$x_{1,2} = \frac{-(2a + 1) \pm \sqrt{5a + 4}}{a - 1}.$$

Осталось рассмотреть случай, когда $a = -\frac{4}{5}$. Используя формулу для корней квадратного уравнения, записанную выше, получаем:

$$x_1 = x_2 = \frac{-\left(2 \cdot \left(-\frac{4}{5}\right) + 1\right) \pm \sqrt{0}}{-\frac{4}{5} - 1} = \frac{-\left(-\frac{8}{5} + 1\right)}{-\frac{9}{5}} = -\frac{1}{3}.$$

Ответ: если $a = 1$, то $x = -\frac{7}{6}$; если $a = -\frac{4}{5}$, то $x = -\frac{1}{3}$; если $a < -\frac{4}{5}$, то корней нет; если $a > -\frac{4}{5}$ (но $a \neq 1$), то

$$x_{1,2} = \frac{-(2a + 1) \pm \sqrt{5a + 4}}{a - 1}.$$

Пример 3. Решить уравнение $\sqrt{x - a} = 2a - x$.

Решение. Сначала будем действовать по стандартной схеме — возведём обе части заданного иррационального уравнения в квадрат и решим полученное квадратное уравнение:

$$\left(\sqrt{x - a}\right)^2 = (2a - x)^2;$$
$$x - a = 4a^2 - 4ax + x^2;$$
$$x^2 - (4a + 1)x + 4a^2 + a = 0.$$

Найдём дискриминант: $D = (4a + 1)^2 - 4(4a^2 + a) = 4a + 1$. Значит,

$$x_{1,2} = \frac{4a + 1 \pm \sqrt{4a + 1}}{2}.$$

При $D < 0$, т. е. при $a < -\frac{1}{4}$, корней нет. Если $D = 0$, т. е. $a = -\frac{1}{4}$, получим: $x = 0$. Сразу замечаем, что в этом случае исходное уравнение обращается в неверное равенство $\sqrt{\frac{1}{4}} = -\frac{1}{2}$. Значит, в этом случае корней нет.

Рассмотрим случай $D > 0$, т. е. $a > -\frac{1}{4}$, когда квадратное уравнение имеет два корня.

Надо выполнить проверку, подставляя поочерёдно каждый из найденных выше корней в исходное уравнение. Эта проверка, как нетрудно догадаться, будет весьма и весьма сложной. Мы выберем другой путь: построим графики функций $y = \sqrt{x-a}$ и $y = 2a - x$ и найдём точки их пересечения. При этом целесообразно рассмотреть три случая:

$$a = 0, \quad -\frac{1}{4} < a < 0, \quad a > 0.$$

В первом случае (при $a = 0$) заданное уравнение принимает вид $\sqrt{x} = -x$. Построив графики функций $y = \sqrt{x}$, $y = -x$ (рис. 169), убеждаемся, что они имеют одну общую точку (0; 0), а потому уравнение имеет только один корень $x = 0$.

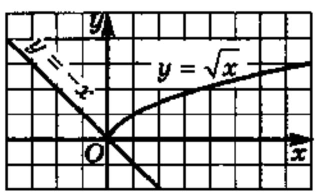


Рис. 169

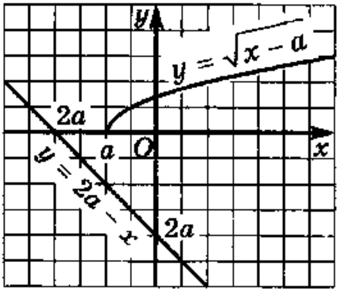


Рис. 170

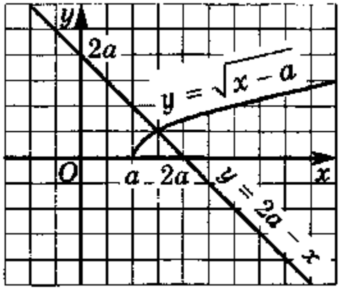


Рис. 171

Во втором случае (при $-\frac{1}{4} < a < 0$) графики функций $y = 2a - x$ и $y = \sqrt{x - a}$ не пересекаются (рис. 170); значит, заданное уравнение не имеет корней.

В третьем случае (при $a > 0$) графики функций $y = 2a - x$ и $y = \sqrt{x - a}$ пересекаются в одной точке (рис. 171); значит, заданное уравнение имеет один корень. Следовательно, из двух полученных выше корней один является посторонним. Какой? Ответ можно почерпнуть из графической иллюстрации, представленной на рис. 171. Абсцисса точки пересечения графиков меньше чем $2a$ ($2a$ — абсцисса точки пересечения прямой $y = 2a - x$ с осью x). Из двух найденных корней $x_1 = \frac{4a + 1 - \sqrt{4a + 1}}{2}$ и $x_2 = \frac{4a + 1 + \sqrt{4a + 1}}{2}$ второй явно больше чем $2a$; чтобы в этом убедиться, достаточно переписать второй корень в виде $x_2 = 2a + \frac{1 + \sqrt{4a + 1}}{2}$. Значит, x_2 — посторонний корень.

Итак, если $a > 0$, то заданное уравнение имеет один корень:

$$x = \frac{4a + 1 - \sqrt{4a + 1}}{2}.$$

Ответ: если $a < 0$, то корней нет; если $a = 0$, то $x = 0$; если $a > 0$, то $x = \frac{4a + 1 - \sqrt{4a + 1}}{2}$.

Замечание. В только что решённом примере ответ можно записать компактнее. Дело в том, что записанная при $a > 0$ формула корня уравнения пригодна и для случая $a = 0$: если $a = 0$, то по указанной формуле получаем $x = 0$. Поэтому ответ можно было записать так: если $a < 0$, то корней нет; если $a \geqslant 0$, то $x = \frac{4a + 1 - \sqrt{4a + 1}}{2}$.

Пример 4. При каких значениях параметра a корни уравнения $2ax^2 - 2x - 3a - 2 = 0$ меньше 1?

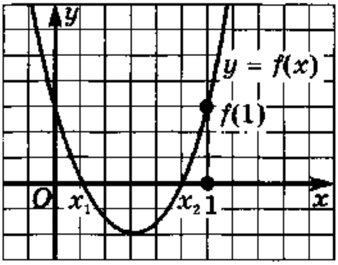


Рис. 172

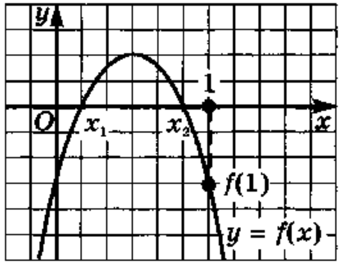


Рис. 173

Решение. Если $a = 0$, то уравнение принимает вид $-2x - 2 = 0$; корень этого уравнения $x = -1$ удовлетворяет заданному условию, он меньше 1.

Если $a \neq 0$, то заданное уравнение является квадратным. Графиком функции $y = f(x)$, где $f(x) = 2ax^2 - 2x - 3a - 2$, является парабола с ветвями вверх, если $2a > 0$, и ветвями вниз, если $2a < 0$. Поскольку корни уравнения по условию должны быть меньше 1, упомянутая выше парабола должна располагаться в координатной плоскости так, как изображено на рис. 172 (для случая $2a > 0$) или на рис. 173 (для случая $2a < 0$).

Дадим аналитическое описание геометрической модели, представленной на рис. 172. Во-первых, напомним, при $2a > 0$ ветви параболы направлены вверх. Во-вторых, парабола обязательно пересекается с осью абсцисс (в крайнем случае касается её), иначе у квадратного уравнения не будет корней. Корни есть, значит, дискриминант D неотрицателен, т. е. $D \geqslant 0$. В-третьих, в точке $x = 1$ имеем $f(1) > 0$. В-четвёртых, $f'(1) > 0$, поскольку касательная к параболе в точке $x = 1$ составляет с осью абсцисс острый угол.

Итак, получаем систему неравенств — аналитическую модель, дающую описание геометрической модели, представленной на рис. 173:

$$\begin{cases} 2a > 0, \\ D \geqslant 0, \\ f(1) > 0, \\ f'(1) > 0. \end{cases}$$

Аналогичные рассуждения позволяют составить вторую систему неравенств — аналитическую модель, дающую описание геометрической модели, представленной на рис. 174:

$$\begin{cases} 2a < 0, \\ D \geqslant 0, \\ f(1) < 0, \\ f'(1) < 0. \end{cases}$$

Решим первую систему неравенств. Составим выражение для дискриминанта D квадратного трёхчлена $2ax^2 - 2x - 3a - 2$:

$$D = 4 - 4 \cdot 2a \cdot (-3a - 2) = 24a^2 + 16a + 4.$$

Составим выражение для $f(1)$:

$$f(1) = 2a \cdot 1^2 - 2 \cdot 1 - 3a - 2 = -a - 4.$$

Составим выражение для $f'(1)$:

$$f'(x) = 2a \cdot 2x - 2 = 4ax - 2;$$
$$f'(1) = 4a - 2.$$

Таким образом, первая система неравенств имеет следующий вид:

$$\begin{cases} 2a > 0, \\ 24a^2 + 16a + 4 \geqslant 0, \\ -a - 4 > 0, \\ 4a - 2 > 0. \end{cases}$$

Эта система не имеет решений, поскольку из первого её неравенства получаем $a > 0$, а из третьего получаем $a < -4$, что не может одновременно выполняться ни при каких значениях a.

Вторая система неравенств имеет следующий вид:

$$\begin{cases} 2a < 0, \\ 24a^2 + 16a + 4 \geqslant 0, \\ -a - 4 < 0, \\ 4a - 2 < 0. \end{cases}$$

Сразу обратим внимание на то, что квадратный трёхчлен $24a^2 + 16a + 4$ имеет отрицательный дискриминант ($D = 16^2 - 4 \cdot 4 \cdot 24 < 0$) и положительный старший коэффициент. Значит, при всех значениях a выполняется неравенство $24a^2 + 16a + 4 > 0$, а потому квадратное неравенство в данной системе неравенств можно отбросить. Далее имеем:

$$\begin{cases} a < 0, \\ a > -4, \\ a < \dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

Решение этой системы достаточно очевидно: $-4 < a < 0$.

Итак, мы нашли все интересующие нас значения параметра a:

$$a = 0; \quad -4 < a < 0.$$

Ответ: $-4 < a \leqslant 0$.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Таблица значений функций φ и Φ

x	$\varphi(x)$	$\Phi(x)$	x	$\varphi(x)$	$\Phi(x)$	x	$\varphi(x)$	$\Phi(x)$
0,00	0,3989	0,0000	0,40	0,3683	0,1554	0,80	0,2897	0,2881
01	3989	0040	41	3668	1591	81	2874	2910
02	3989	0080	42	3653	1628	82	2850	2939
03	3988	0120	43	3637	1664	83	2827	2967
04	3986	0160	44	3621	1700	84	2803	2995
05	3984	0199	45	3605	1736	85	2780	3023
06	3982	0239	46	3589	1772	86	2756	3051
07	3980	0279	47	3572	1808	87	2732	3078
08	3977	0319	48	3555	1844	88	2709	3106
09	3973	0359	49	3538	1879	89	2685	3133
0,10	0,3970	0,0398	0,50	0,3521	0,1915	0,90	0,2661	0,3159
11	3965	0438	51	3503	1950	91	2637	3186
12	3961	0478	52	3485	1985	92	2613	3212
13	3956	0517	53	3467	2019	93	2589	3238
14	3951	0557	54	3448	2054	94	2565	3264
15	3945	0596	55	3429	2088	95	2541	3289
16	3939	0636	56	3410	2123	96	2516	3315
17	3932	0675	57	3391	2157	97	2492	3340
18	3925	0714	58	3372	2190	98	2468	3365
19	3918	0753	59	3352	2224	99	2444	3389
0,20	0,3910	0,0793	0,60	0,3332	0,2257	1,00	0,2420	0,3413
21	3902	0832	61	3312	2291	01	2396	3438
22	3894	0871	62	3292	2324	02	2371	3461
23	3885	0910	63	3271	2357	03	2347	3485
24	3876	0948	64	3251	2389	04	2323	3508
25	3867	0987	65	3230	2422	05	2299	3531
26	3857	1026	66	3209	2454	06	2275	3554
27	3847	1064	67	3187	2486	07	2251	3577
28	3836	1103	68	3166	2517	08	2227	3599
29	3825	1141	69	3144	2549	09	2203	3621
0,30	0,3814	0,1179	0,70	0,3123	0,2580	1,10	0,2179	0,3643
31	3802	1217	71	3101	2611	11	2155	3665
32	3790	1255	72	3079	2642	12	2131	3686
33	3778	1293	73	3056	2673	13	2107	3708
34	3765	1331	74	3034	2703	14	2083	3729
35	3752	1368	75	3011	2734	15	2059	3749
36	3739	1406	76	2989	2764	16	2036	3770
37	3726	1443	77	2966	2794	17	2012	3790
38	3712	1480	78	2943	2823	18	1989	3810
39	3697	1517	79	2920	2852	19	1965	3830

Окончание таблицы

x	$\varphi(x)$	$\Phi(x)$	x	$\varphi(x)$	$\Phi(x)$	x	$\varphi(x)$	$\Phi(x)$
1,20	0,1942	0,3849	1,70	0,0940	0,4554	2,40	0,0224	0,4918
21	1919	3869	71	0925	4564	42	0213	4922
22	1895	3888	72	0909	4573	44	0203	4927
23	1872	3907	73	0893	4582	46	0194	4931
24	1849	3925	74	0878	4591	48	0184	4934
25	1826	3944	75	0863	4599	50	0175	4938
26	1804	3962	76	0848	4608	52	0167	4941
27	1781	3980	77	0833	4616	54	0158	4945
28	1758	3997	78	0818	4625	56	0151	4948
29	1736	4015	79	0804	4633	58	0143	4951
1,30	0,1714	0,4032	1,80	0,0790	0,4641	2,60	0,0136	0,4953
31	1691	4049	81	0775	4649	62	0129	4956
32	1669	4066	82	0761	4656	64	0122	4959
33	1647	4082	83	0748	4664	66	0116	4961
34	1626	4099	84	0734	4671	68	0110	4963
35	1604	4115	85	0721	4678	70	0104	4965
36	1582	4131	86	0707	4686	72	0099	4967
37	1561	4147	87	0694	4693	74	0093	4969
38	1539	4162	88	0681	4699	76	0088	4971
39	1518	4177	89	0669	4706	78	0084	4973
1,40	0,1497	0,4192	1,90	0,0656	0,4713	2,80	0,0079	0,4974
41	1476	4207	91	0644	4719	82	0075	4976
42	1456	4222	92	0632	4726	84	0071	4977
43	1435	4236	93	0620	4732	86	0067	4979
44	1415	4251	94	0608	4738	88	0063	4980
45	1394	4265	95	0596	4744	90	0060	4981
46	1374	4279	96	0584	4750	92	0056	4982
47	1354	4292	97	0573	4756	94	0053	4984
48	1334	4306	98	0562	4761	96	0050	4985
49	1315	4319	99	0551	4767	98	0047	4986
1,50	0,1295	0,4332	2,00	0,0540	0,4772	3,00	0,00443	0,49865
51	1276	4345	02	0519	4783			
52	1257	4357	04	0498	4793	3,10	00327	49903
53	1238	4370	06	0478	4803	3,20	00238	49931
54	1219	4382	08	0459	4812			
55	1200	4394	10	0440	4821	3,30	00172	49952
56	1182	4406	12	0422	4830	3,40	00123	49966
57	1163	4418	14	0404	4838			
58	1145	4429	16	0387	4846	3,50	00087	49977
59	1127	4441	18	0371	4854			
1,60	0,1109	0,4452	2,20	0,0355	0,4861	3,60	00061	49984
61	1092	4463	22	0339	4868	3,70	00042	49989
62	1074	4474	24	0325	4875	3,80	00029	49993
63	1057	4484	26	0310	4881			
64	1040	4495	28	0297	4887	3,90	00020	49995
65	1023	4505	30	0283	4893	4,00	0,0001338	499968
66	1006	4515	32	0270	4898			
67	0989	4525	34	0258	4904	4,50	0000160	499997
68	0973	4535	36	0246	4909	5,00	0000015	49999997
69	0957	4545	38	0235	4913			

ОГЛАВЛЕНИЕ

Глава 6. ***Уравнения и неравенства. Системы уравнений и неравенств***

Учебное издание

Мордкович Александр Григорьевич,
Семенов Павел Владимирович

МАТЕМАТИКА:
алгебра и начала математического анализа, геометрия

АЛГЕБРА И НАЧАЛА МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА
11 класс

В двух частях

Часть 1

УЧЕБНИК

для учащихся общеобразовательных организаций
(базовый и углублённый уровни)

Генеральный директор издательства *М. И. Безвиконная*
Главный редактор *К. И. Куровский*
Редактор *С. В. Бахтина*
Оформление и художественное редактирование: *Т. С. Богданова*
Технический редактор *О. Б. Нестерова*
Корректоры *Л. В. Дьячкова, С. О. Никулаев*
Компьютерная вёрстка: *А. А. Горкин*

Формат $60 \times 90^1/_{16}$. Бумага офсетная № 1.
Гарнитура «Школьная». Печать офсетная.
Усл. печ. л. 19,5. Тираж 20 000 экз. Заказ № 5172

Издательство «Мнемозина».
105043, Москва, ул. 6-я Парковая, 29б.
Тел.: 8 (499) 367 5418, 367 6781.
E-mail: ioc@mnemozina.ru
www.mnemozina.ru

ИНТЕРНЕТ-магазин.
Тел.: 8 (495) 783 8284, 783 8286.
www.shop.mnemozina.ru

Отпечатано в ОАО «Первая Образцовая типография»,
филиал «Ульяновский Дом Печати».
432980, г. Ульяновск, ул. Гончарова, 14.